Algebra matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Pojem lineárního zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ a jeho maticový zápis (vzhledem ke kanonickým bázím).

Dnešní přednáška

1. Zavedeme základní algebraické operace s maticemi.
2. V příští přednášce vše zobecníme pro prostory konečných dimensí; zavedeme pojem matice lineárního zobrazení (vzhledem k pevně zvoleným bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Již víme: $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Jak se operace v $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ projeví na „manipulaci s tabulkami“? Použijeme sloupcový zápis matic.

Pro $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s)$ a skalár a z $\mathbb{F}$ je:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ matice se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$. Zápis $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ čteme součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.
2. $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je matice se sloupcovým zápisem $(a \cdot \mathbf{a}_1, \ldots, a \cdot \mathbf{a}_s)$. Zápis $a \cdot \mathbf{A}$ čteme součin skaláru a a matice $\mathbf{A}$.

Nulový vektor[a] v lineárním prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je matice $\mathbf{O}_{s,r} = \underbrace{(\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o})}_{s\text{-krát}}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor v $\mathbb{F}^r$.

[a] Říkáme také: nulová matice.

Příklad: výpočty v $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

1. Příklad součtu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Příklad skalárního násobku:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Nulový vektor v v $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je:

$$\mathbf{O}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámky k součtu matic a ke skalárnímu násobku matic

Sčítání matic a skalární násobení skalárem jsou operace v lineárním prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$. Přirozená čísla s a r jsou pevná. Proto:

1. Sčítat můžeme pouze matice stejných rozměrů. Pro matice různých rozměrů není sčítání definováno.

   Sloupcový zápis součtu

   $$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) + (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$$

   dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li sečíst dvě matice stejných rozměrů, sečtěte položky na odpovídajících posicích.

2. Sloupcový zápis skalárního násobku

   $$a \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = (a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$$

   dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li matici vynásobit skalárem, vynásobte tímto skalárem každou položku matice.

Vlastnosti součtu matic a skalárního násobku matic

Protože $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
3. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
4. Pro každé $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ existuje právě jedno[a] $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ tak, že $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{s,r}$.
5. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
6. $a \cdot (b \cdot \mathbf{A}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
7. $a \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \cdot \mathbf{A} + a \cdot \mathbf{B}$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
8. $(a + b) \cdot \mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.

[a] Tomuto jednoznačně určenému $\mathbf{B}$ říkáme opačná matice k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $-\mathbf{A}$.

Připomenutí značení (téma 4A)

Matice $\mathbf{A}$ se sloupcovým zápisem $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$, dané předpisem

$$\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

Princip superposice dává

$$\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j$ značíme $\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$ jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Proto

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Definice (součin matic)

Pro situaci[a]

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\quad \mathbf{A} \quad} & \mathbb{F}^p & \xrightarrow{\quad \mathbf{B} \quad} & \mathbb{F}^r \\ \mathbf{e}_j & \longmapsto & \mathbf{a}_j & \longmapsto & \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j \end{array}$$

je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice,[b] jejíž j-tý sloupec je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$, kde $\mathbf{a}_j$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Ve sloupcovém zápisu tedy platí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s)$.

Matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ říkáme součin matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$.

---

[a] Diagram okamžitě dává rozměrovou zkoušku pro součin matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: počet řádků matice $\mathbf{A}$ musí být roven počtu sloupců matice $\mathbf{B}$. Jindy součin matic nedefinujeme, protože by skládání nedávalo smysl.

[b] Položkový zápis součinu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: pro $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\ldots,p,j=1,\ldots,s}$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})_{i=1,\ldots,r,k=1,\ldots,p}$ je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice s položkami $(c_{ij})_{i=1,\ldots,r,j=1,\ldots,s}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} \cdot a_{kj}$$

Příklad (matice složených lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Projekce na osu x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „nejprve otočte o úhel α, potom spočtěte projekci na osu x“.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „nejprve spočtěte projekci na osu x, potom otočte o úhel α“.

Příklad (reflexe podle osy, která svírá úhel α s osou x)

Jde o složené zobrazení: nejdříve rotace o úhel $-\alpha$, potom reflexe, nakonec rotace o úhel α.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Poznámka

Analogicky lze vytvořit matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Aplikace: matematická analýza, fyzika, grafika.[a]

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 4.1.6 a 4.2.9 skript.

Vlastnosti operací s maticemi

1. Pro součin platí asociativní zákon $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$, kdykoli jsou jednotlivé součiny definovány.
2. Obecně neplatí komutativní zákon $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (i když jsou oba součiny definovány).
3. Pro každé n definujeme jednotkovou matici[a] $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ takto: $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou vektory kanonické báze $\mathbb{F}^n$.

   Potom pro každou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ platí: $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s$.

[a] Matice $\mathbf{E}_n$ je maticí identického lineárního zobrazení $\mathbf{id} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$.

Důkaz.

Okamžitě z vlastností lineárních zobrazení. ■

Příklad (popis obrazu projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zajímá nás, zda vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ je projekcí nějakého vektoru $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. To lze zjistit algebrou matic:

$$\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Žádný vektor $\mathbf{x}$, jehož projekce na osu x je vektor $\mathbf{b}$, neexistuje.

To ale znamená: soustava rovnic $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení!

Příklad (popis vzoru projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na $\mathbf{b}$ projekcí zobrazí. To lze zjistit algebrou matic:

$$\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Řešením soustavy rovnic $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je množina všech vektorů $\mathbf{x}$ tvaru $\begin{pmatrix} 3 \\ x_2 \end{pmatrix}$, kde x_2 je libovolné reálné číslo.[a]

---

[a] Řešení lze napsat i ve tvaru $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Jak uvidíme, tento druhý způsob zápisu řešení bude mít mnohé výhody.

Příklad (projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$ není invertibilní)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Existují matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{E}_2"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{P}_x"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{P}_x"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{E}_2"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{B}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \quad ?$$

Intuice: žádné takové matice neexistují, protože matice jsou lineární zobrazení.

Jak intuici dokázat? Algebrou matic!

Příklad (projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$ není invertibilní, pokrač.)

Ptáme se, zda existují matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ takové, že platí rovnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takové matice neexistují, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek

Nenulovost čtvercové matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nezaručuje existenci matic $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, které by řešily rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ a $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Proč nás to zajímá?

Otázka řešitelnosti obecných maticových rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}$ je důležitá. Proč?
Jde o zobecnění řešení soustav lineárních rovnic.