

Lineární zobrazení, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.3, 3.4 a 9.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ (sloupcový zápis matice, každý sloupec \mathbf{a}_j je vektor z \mathbb{F}^r) je **ztotožněna** s lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r, \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$.

Operace s maticemi odpovídají operacím s lineárními zobrazeními.

Dnešní přednáška

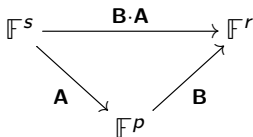
- 1 Pojmy **jádro**, **obraz**, **defekt** a **hodnost** lineárního zobrazení.

Tyto pojmy umožní jemnější klasifikaci lineárních zobrazení.

- 2 Pojem matice **obecného** lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k **obecným** uspořádaným bázím. Prostory L_1 a L_2 musí mít konečnou dimenzi.

Připomenutí (témata 4A a 3B)

- 1 At' L_1, L_2 jsou lineární prostory nad \mathbb{F} . Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z \mathbb{F} a vš. \vec{x}, \vec{x}' z L_1 , říkáme **lineární zobrazení** z L_1 do L_2 .
- 2 Zápis $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ znamená^a $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$ -tý sloupec \mathbf{A} .
Tudíž platí $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, pro všechna \mathbf{x} z \mathbb{F}^s .
- 3 Trojúhelník



je komutativní.

^aV terminologii dnešní přednášky: $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ je maticí zobrazení $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$ -tý sloupec \mathbf{A} vzhledem ke kanonické bázi. Ale nepředbíhejme 😊

Definice (speciální vlastnosti lineárních zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$ říkáme:

- 1 **monomorfismus**, je-li f injektivní (také: prosté) zobrazení.
- 2 **epimorfismus**, je-li f surjektivní (také: na) zobrazení.
- 3 **isomorfismus**, je-li f bijektivní (také: prosté a na) zobrazení.^a

^aEkvivalentně: k zobrazení f existuje inverzní zobrazení f^{-1} a toto inverzní zobrazení je opět lineární.

Tvrzení

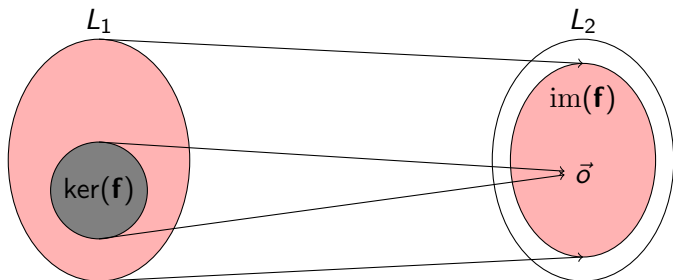
Složení monomorfismů/epimorfismů/isomorfismů je monomorfismus/epimorfismus/isomorfismus. Identita je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška.

Definice (obraz a jádro)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení. Množině
 $\ker(f) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{o}\}$ říkáme **jádro f** , množině
 $\operatorname{im}(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \text{ z } L_1\}$ říkáme **obraz f** .



Slogany (tj. reklamní hesla, nikoli skutečnost)

Jádro f říká, jak moc je f monomorfismus.

Obraz f říká, jak moc je f epimorfismus.

Tvrzení

At' $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení. Pak $\ker(\mathbf{f})$ je podprostor L_1 , $\text{im}(\mathbf{f})$ je podprostor L_2 .^a

^aObecněji: $\{\mathbf{f}(\vec{w}) \mid \vec{w} \in W\}$ je podprostor L_2 , pro jakýkoli podprostor W prostoru L_1 .

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (defekt a hodnost lineárního zobrazení)

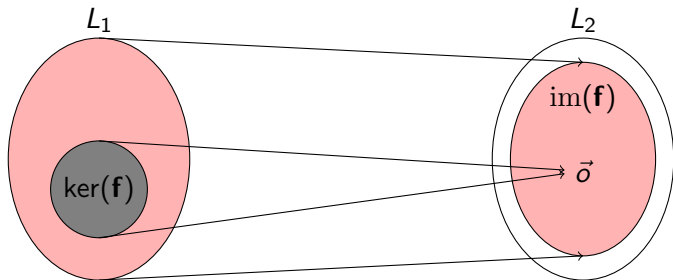
At' $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, at' prostor L_1 má **konečnou** dimenzi. Číslo $\text{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$ říkáme **defekt** lineárního zobrazení \mathbf{f} a číslo $\text{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\text{im}(\mathbf{f}))$ říkáme **hodnost** (také: **rank**) lineárního zobrazení \mathbf{f} .

Tvrzení (Věta o dimenzi jádra a obrazu)

At' $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, at' prostor L_1 má konečnou dimenzi. Pak $\text{def}(\mathbf{f}) + \text{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_1)$.

Důkaz.

Bez důkazu (důkaz je například ve [skriptech](#), Věta 3.3.6).



$$\text{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$$

$$\text{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\text{im}(\mathbf{f}))$$



Tvrzení (charakterisace monomorfismů)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimenzi. Pak je ekvivalentní:

- 1 f je monomorfismus.
- 2 $\text{def}(f) = 0$.
- 3 f respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina).

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek (monomorfismy a soustavy rovnic)

$A : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ je monomorfismus právě tehdy, když **soustava**
 $A \cdot x = o$ má pouze triviální řešení.

Tvrzení (charakterisace isomorfismů)

At' $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, at' prostor L_1 má **konečnou** dimenzi. Pak je ekvivalentní:

- 1 f je isomorfismus.
- 2 f je monomorfismus a epimorfismus současně.
- 3 $\text{def}(f) = 0$ a $\text{im}(f) = L_2$ současně.
- 4 $\text{def}(f) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.
- 5 f respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina) a každá rovnice $f(\vec{x}) = \vec{b}$ má alespoň jedno řešení.

Důkaz.

Přednáška.



Důsledek (isomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ je isomorfismus právě tehdy, když $s = r$ a **každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.**

Definice (regulární a singulární matice)

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ typu je **regulární** (také: **invertibilní**, také: **isomorfismus**), pokud existuje jednoznačně určená matice \mathbf{A}^{-1} taková, že platí rovnosti $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Matici \mathbf{A}^{-1} říkáme **inverse** matice \mathbf{A} .

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je **singulární**, pokud není regulární.

Příklad (rotace o úhel α v \mathbb{R}^2 je isomorfismus)

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

je regulární (invertibilní) matice.^a

^aInversním zobrazením rotace o úhel α je rotace o úhel $-\alpha$.

Důsledek (isomorfismy prostorů konečné dimenze)

Ať $\dim(L_1) = \dim(L_2) = n$. Potom je, pro lineární zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$, ekvivalentní:

- 1 f je monomorfismus.
- 2 f je epimorfismus.
- 3 f je isomorfismus.

Příklad (důležité a užitečné: Lagrangeova interpolace)

Ať a_1, \dots, a_n jsou navzájem různá reálná čísla. Lineární zobrazení

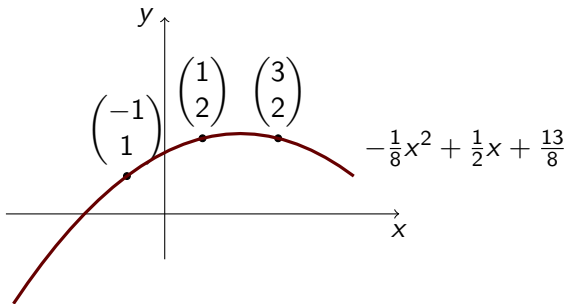
$$\text{ev}_{(a_1, \dots, a_n)} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}$$

je monomorfismus, tudíž isomorfismus.

Příklad (Lagrangeova interpolace, pokrač.)

$\mathbf{ev}_{(a_1, \dots, a_n)}$ je isomorfismus: pro každou n -tici $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ v \mathbb{R}^n existuje

jediný polynom^a $p_{(b_1, \dots, b_n)}(x)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$ tak, že platí $p_{(b_1, \dots, b_n)}(a_i) = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.



^aŘíká se mu **Lagrangeův interpolační polynom**, viz **skripta**, Příklad 3.3.9.

Tvrzení (důležité)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze prostoru L . Potom
výpočet souřadnic v bázi B

$$\text{coord}_B : L \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \vec{x} \mapsto \text{coord}_B(\vec{x})$$

je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška. ■

Poznámka (důležitá)

Protože isomorfní lineární prostory se z abstraktního hlediska nijak neliší, vidíme: až na isomorfismus neexistují jiné konečně dimensionální lineární prostory nad \mathbb{F} než prostory tvaru \mathbb{F}^n .

Definice (matice lineárního zobrazení)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . **Matice zobrazení f** (vzhledem k B a C) je taková matice \mathbf{A}_f , pro kterou platí

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^s & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{A}_f \cdot x} & \mathbb{F}^r \\
 \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L_1 & \xrightarrow{f} & L_2
 \end{array}$$

neboli:

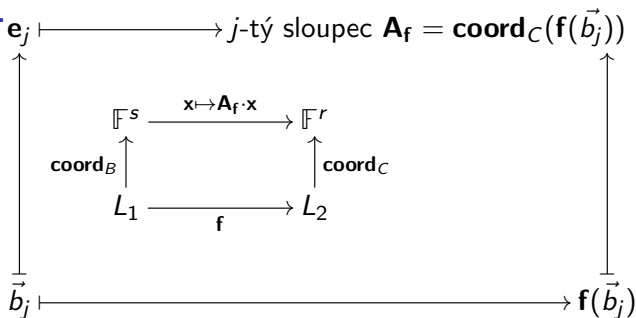
$$\begin{array}{ccc}
 \text{coord}_B(\vec{x}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A}_f \cdot \text{coord}_B(\vec{x}) = \text{coord}_C(f(\vec{x})) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \vec{x} & \xrightarrow{\quad} & f(\vec{x})
 \end{array}$$

pro každý vektor \vec{x} .

Tvrzení (výpočet matice lineárního zobrazení)

At' $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, at' $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . Potom matice \mathbf{A}_f má r řádků a s sloupců. Navíc j -tý sloupec matice \mathbf{A}_f je tvořen souřadnicemi $\text{coord}_C(f(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.

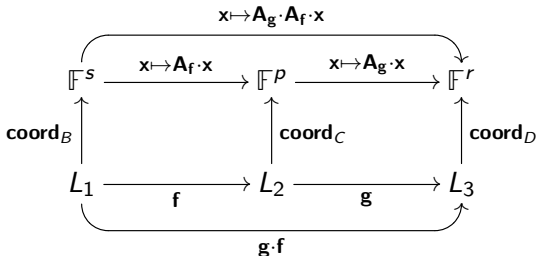
Důkaz.



Věta (matice složeného zobrazení)

At' L_1, L_2, L_3 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$,
 $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p)$ a $D = (\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_r)$. At' $f : L_1 \rightarrow L_2$ a $g : L_2 \rightarrow L_3$
 jsou lineární zobrazení s maticemi A_f (vzhledem k B a C) a A_g
 (vzhledem k C a D). Potom $g \circ f : L_1 \rightarrow L_3$ má matici $A_g \cdot A_f$
 (vzhledem k B a D).

Důkaz.

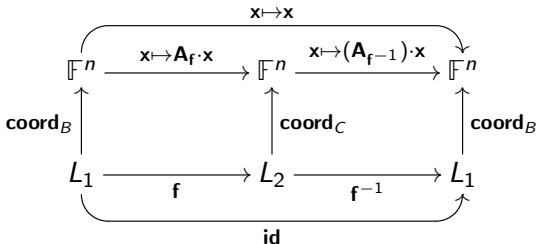


Věta (matice isomorfismu)

At' L_1, L_2 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$,
 $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$. At' lineární zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$ je isomorfismus
 s maticí zobrazení \mathbf{A}_f (vzhledem k B a C). Potom existuje
 jednoznačně určená matice \mathbf{A}_f^{-1} splňující rovnosti
 $\mathbf{A}_f^{-1} \cdot \mathbf{A}_f = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{A}_f^{-1}$. Matice \mathbf{A}_f^{-1} je matice $\mathbf{A}_{f^{-1}}$ inverzního
 zobrazení f^{-1} (vzhledem k C a B).^a

^aTj. regulární (invertibilní) matice jsou přesně matice isomorfismů.

Důkaz.



Proto $\mathbf{A}_f^{-1} \cdot \mathbf{A}_f = \mathbf{E}_n$. Druhá rovnost analogicky.

Příklad (výpočet matice pro derivování)

$\mathbb{F}^{\leq 3}[x]$ je prostor polynomů stupně ≤ 3 nad tělesem \mathbb{F} . Báze $B = (x^3, x^2, x^1, 1)$. Zobrazení

$$\begin{aligned} \mathbf{der} : \mathbb{F}^{\leq 3}[x] &\rightarrow \mathbb{F}^{\leq 3}[x], \\ (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) &\mapsto (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \end{aligned}$$

je lineární a má následující matici vzhledem k B :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pro druhou derivaci: spočítáme součin $\mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}}$, atd.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nekanonické bázi)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení \mathbf{f} tedy:

- ① „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
- ② „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

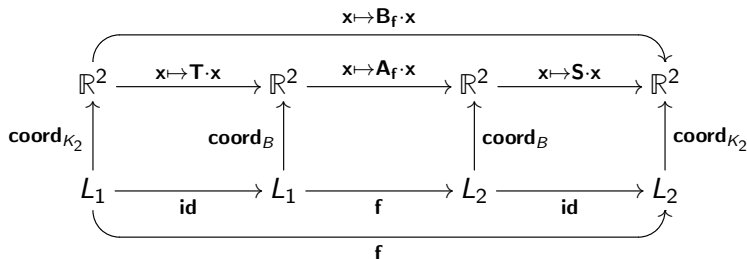
Vzhledem k **nekanonické** bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ má tedy \mathbf{f} matici

$$\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jak spočítat matici $\mathbf{B}_{\mathbf{f}}$ zobrazení \mathbf{f} vzhledem ke **kanonické** bázi K_2 ?

Příklad (pokrač.)

Myšlenka řešení: hledaná matice \mathbf{B}_f musí splňovat rovnici $\mathbf{B}_f = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, kde



Jak najít matice \mathbf{S} a \mathbf{T} ? **Jednoduše:** jsou to matice identického zobrazení, navíc evidentně platí $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Příklad (pokrač.)

Platí (díky tomu, co jsme již dokázali)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Příští přednáška (téma 5B)

Konceptuální hledání (analogií) matic \mathbf{T} a \mathbf{S} : takzvané **matice transformace souřadnic**.