GEM a soustavy lineárních rovnic, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 6 a 7.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Gaussova eliminační metoda (GEM) jako universální a systematická metoda řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Dnešní přednáška

1. Lineární maticové rovnice.
2. Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Příklad

Nalezněte všechny matice $\mathbf{X}$, které splňují rovnost[a]
$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$, kde $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je matice rotace o úhel α, $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Rozměrová zkouška: musí platit $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Rešeními jsou například matice $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{O}_{2,2}$ a $\mathbf{R}_\alpha$.

Jak nalézt všechna řešení? Předvedeme universální metodu.

1. Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x_{11} - \sin\alpha \cdot x_{21} & \cos\alpha \cdot x_{12} - \sin\alpha \cdot x_{22} \\ \sin\alpha \cdot x_{11} + \cos\alpha \cdot x_{21} & \sin\alpha \cdot x_{12} + \cos\alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x_{11} + \sin\alpha \cdot x_{12} & -\sin\alpha \cdot x_{11} + \cos\alpha \cdot x_{12} \\ \cos\alpha \cdot x_{21} + \sin\alpha \cdot x_{22} & -\sin\alpha \cdot x_{21} + \cos\alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix}.$$

[a] Geometrický význam: hledáme všechny transformace $\mathbf{X}$ roviny, které jsou záměnné s rotací o úhel α.

Příklad (pokrač.)

2. Rovnost $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{O}_{2,2}$. Stačí tedy vyřešit soustavu čtyř rovnic

$$
\begin{array}{rrrrcl}
 & -\sin\alpha \cdot x_{21} & -\sin\alpha \cdot x_{12} & & = & 0 \\
\sin\alpha \cdot x_{11} & & & -\sin\alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\
\sin\alpha \cdot x_{11} & & & -\sin\alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\
 & \sin\alpha \cdot x_{21} & +\sin\alpha \cdot x_{12} & & = & 0
\end{array}
$$

V maticovém zápisu (po skončení GEM) máme řešit soustavu

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
\sin\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 \\
0 & \sin\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

v závislosti na parametru $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Příklad (pokrač.)

3. Pro $\sin\alpha = 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a tudíž řešení je tvaru $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, kde x_{11}, x_{21}, x_{12} a x_{22} jsou libovolná reálná čísla.

Závěr: s rotací o úhel 0 nebo π je záměnná libovolná transformace roviny.

Příklad (pokrač.)

4. Pro $\sin\alpha \neq 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a řešení $\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Závěr: s rotací $\mathbf{R}_\alpha$ o úhel $\alpha \notin \{0, \pi\}$ jsou záměnné transformace roviny tvaru $\mathbf{X} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámky

1. Předchozí metoda (rozměrová zkouška pro hledanou matici $\mathbf{X}$ a následné řešení velké soustavy rovnic) je universální metodou pro řešení maticových rovnic, kde neznámá matice $\mathbf{X}$ vystupuje pouze v první mocnině.

   Jak už to u universálních metod bývá: v některých případech je taková metoda zbytečně zdlouhavá.

2. Předvedeme speciální metodu řešení maticových rovnic tvaru[a] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

[a] Protože rovnost $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, získáme tak i metodu pro řešení rovnic tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Musíme ovšem obezřetně zacházet s transposicemi matic.

Převod maticové rovnice na více soustav lineárních rovnic

Maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, a matice $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^r$, převedeme na p soustav

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

kde $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_p)$.

1. Každou takovou soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ vyřešíme předešlými postupy.[a]
2. Řešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ existuje právě tehdy, když každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ má řešení.
3. Pokud má každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ řešení, pak „sesazením“ všech řešení $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_s$ jednotlivých soustav dostaneme řešení původní maticové rovnice: $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \ldots \ \mathbf{x}_p)$.

[a] Jak uvidíme, lze takový systém soustav řešit simultánně.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, máme řešit dvě soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obě soustavy mají stejnou matici soustavy, lze je tedy řešit simultánně:

1. Simultánní GEM:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Podle Frobeniovy věty mají obě soustavy řešení.

Příklad (pokrač.)

2. Zápis $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ kóduje dvě soustavy s řešeními (v pořadí soustav zleva doprava):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

3. „Sesazení řešení dohromady“: celkové řešení je tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3-7a & -7b \\ a & b \\ -1+5a & 1+5b \end{pmatrix}$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámka

Víme, že pro regulární matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jediné řešení, a sice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Toto jediné řešení lze nalézt postupem, kterému se někdy říká Gaussova-Jordanova eliminace: eleminace řádkovými úpravami nekončí po dosažení horní trojúhelníkové matice, ale pokračuje nulováním i nad hlavní diagonálou.

Získáváme tak postup

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Speciálně: pro regulární $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ lze nalézt $\mathbf{A}^{-1}$ postupem

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Více viz cvičení a skripta, Příklad 6.4.12.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$$

Myšlenky postupu:

1. Zadané řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a má „směr“ určený vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Tudíž: hledanou soustavu očekáváme ve tvaru $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$, neboli $a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$.
   Jak najít soustavu $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$ systematicky?

Příklad, pokrač.

Podle Frobeniovy věty je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$$

řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

1. Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé; tvoří tudíž fundamentální systém soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde $\mathrm{def}(\mathbf{A}) = 2$ a $\mathbf{A}$ má tři sloupce. To umožní nalézt $\mathbf{A} = (a_1 \; a_2 \; a_3)$.
2. Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, neboli $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$. Matici $\mathbf{A}$ známe, můžeme dopočítat $\mathbf{b} = (b)$.

Příklad, pokrač.

3. Nalezení $\mathbf{A}$:
   1. Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, musí platit $(2\ 0\ 4) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$.
   2. Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, musí platit $(1\ 2\ 0) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$

   Tudíž $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ je fundamentální systém soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$, neboli (např.) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A} = (2 \ -1 \ -1)$.

Příklad, pokrač.

4. Nalezení **b**. Protože $\mathbf{A} = (2 \ \ -1 \ \ -1)$ a $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, je $b = -2$.
5. Závěr: hledaná soustava je (například) $(2 \ \ -1 \ \ -1 \mid -2)$.

Poznámky

1. Předchozí příklad nalezl obecnou rovnici roviny z jejího parametrického zadání. Postup využíval platnosti Frobeniovy věty a základních vlastností matic.
2. Očekáváme: podobný postup bude fungovat pro nalezení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad tělesem $\mathbb{F}$, která má řešení

$$\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

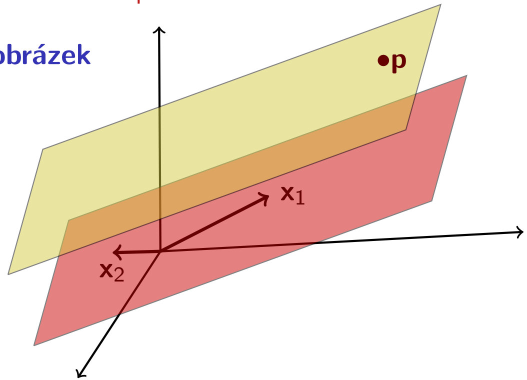
kde vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé.

Definice

Zápisu $\mathbf{p} + \operatorname{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$, kde vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé, říkáme afinní podprostor dimense d v prostoru $\mathbb{F}^s$.[a] Seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ říkáme směr (také: zaměření) tohoto podprostoru.

[a] Také: d-dimensionální plocha v $\mathbb{F}^s$.

Ilustrační obrázek



Tvrzení

Ke každému d-dimensionálnímu afinnímu podprostoru $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$ existuje alespoň jedna soustava tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ jako množinu řešení.

Důkaz.

Podrobně na přednášce; hlavní myšlenky jsou:

1. Musí platit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$ pro $i = 1, \ldots, d$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
2. Označme $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$. Protože seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je lineárně nezávislý, platí $d = \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}^T)$. Soustava[a] $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$ má $s - d$ prvků ve svém fundamentálním systému. Označme tento systém jako $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{s-d})$.
3. Známe $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{s-d})^T$ a dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.

∎

[a] Pozor: matici $\mathbf{X}^T$ známe, neznámá je označena jako $\mathbf{a}$.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

1. Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Platí $3 = \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}^T)$.
2. Matice $\mathbf{A}$ má jako řádky fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Protože $\mathrm{rank}(\mathbf{X}^T) = 3$, bude mít matice $\mathbf{A}$ dva lineárně nezávislé řádky.

Příklad (pokrač.)

3. Fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$, neboli homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ je například } \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik:[a] proto je i $4 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

[a] Fundamentální systém tvoří bázi jádra matice soustavy. A nenulové skalární násobky prvků jakékoli báze opět tvoří bázi.

Příklad (pokrač.)

4. Dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Tudíž $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Odpověď: 3-dimensionální afinní podprostor v $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

je řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$ nad $\mathbb{R}$.

Závěrečné poznámky

1. GEM je sice universální metodou řešení soustav lineárních rovnic, nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je však numericky nestabilní.

   V praxi je pro řešení (zvláště velkých) soustav lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) nutno použít jiné metody (například iterační Gaussovu-Seidelovu metodu,[a] a jiné). Tyto metody jsou mimo sylabus standardní přednášky z lineární algebry.

2. Jak řešit soustavy s parametrem? GEM je universální metodou! Při řešení soustav s parametrem pomocí GEM musíme být velmi opatrní na provádění elementárních úprav.

   Pro soustavy se čtvercovou maticí vyvineme později další metodu řešení (kombinaci GEM a Cramerovy věty).

3. Nepovinné: Nad $\mathbb{R}$ lze mít i další geometrický pohled na GEM (tzv. Householderovy reflexe).

[a] Viz Poznámku 6.4.7 skript.