

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Matice lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimenzí.
- 2 Matice transformace souřadnic.

Dnešní přednáška

- 1 Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$, kde L má konečnou dimenzi.
Zjistíme, pro které vektory \vec{x} platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ (tzv **homotetie** — to je to nejjednodušší lineární zobrazení z L do L).
- 2 Budeme se snažit změnit bázi L tak, aby ve směrech vektorů nové báze bylo zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ homotetií (obecně pro každý směr různou). Ne vždy to půjde.

Příští přednáška

- 1 Diagonalisace matic nad \mathbb{R} a nad \mathbb{C} .
- 2 Dvě aplikace diagonalisace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.^a

^aTyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Příklad (equilibrium stochastických procesů)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezněte alespoň jeden **nenulový** vektor \mathbf{q} tak, aby platila rovnost^a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$.

To je snadné: $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože **řádkové součty** matice \mathbf{A} jsou 1. Tudíž $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

^aStejnou (ale komplikovaněji zadanou) úlohu řeší algoritmus PageRank, viz například K. Bryan a A. Lease, **The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google**, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581, nebo Dodatek F skript.

Co dělat pro obecnou matici \mathbf{A} ?

Měli jsme štěstí („hezký“ tvar matice \mathbf{A} , takovým maticím se říká **řádkově stochastické**). Jak ale postupovat pro **obecnou** matici \mathbf{A} ?

Příklad (equilibrium stochastických procesů, znovu a jinak)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezneme všechna nenulová řešení všech soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je neznámé.

Přepsáním soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ na $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ zjistíme, co je třeba udělat:

- 1 Matice $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2$ musí být singulární. Jedině tehdy bude mít rovnice $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ nenulové řešení.

To jest: hledáme všechna λ taková, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

To znamená vyřešit rovnici $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

- 2 Pro konkrétní hodnoty λ nalezneme nenulové řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pomocí GEM.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

$$\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 0.3 - x & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 - x \end{vmatrix} = (0.3 - x) \cdot (0.2 - x) - 0.56 = \\ = x^2 - 0.5x - 0.5 = (x - 1) \cdot (x + 0.5) = 0.$$

Soustava $(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pro

① $x = 1$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & -0.8 & 0 \end{array} \right)$ a řešení^a $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

To znamená: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro všechna \mathbf{x} ze $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

② $x = -0.5$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 \end{array} \right)$ a řešení^b $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

To znamená: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -0.5 \cdot \mathbf{x}$ pro všechna \mathbf{x} ze $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

^aTo jsme již věděli.

^bTo je nová informace.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

Co jsme se vlastně dozvěděli a k čemu je to dobré?

- 1 V souřadnicovém systému $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ se matice \mathbf{A} stane **diagonální maticí** $D(1; -0.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1; -0.5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2}}$$

tudíž

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1; -0.5)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{T}_{K_2 \rightarrow B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \rightarrow K_2}}$$

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

- ② Díky předchozímu vidíme, že zadáme-li **rekurentní proces**

$$\mathbf{x}_0 \text{ libovolný vektor z } \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

pak se **posloupnost** vektorů $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ chová následovně:

- ① Je-li \mathbf{x}_0 na přímce $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \dots$

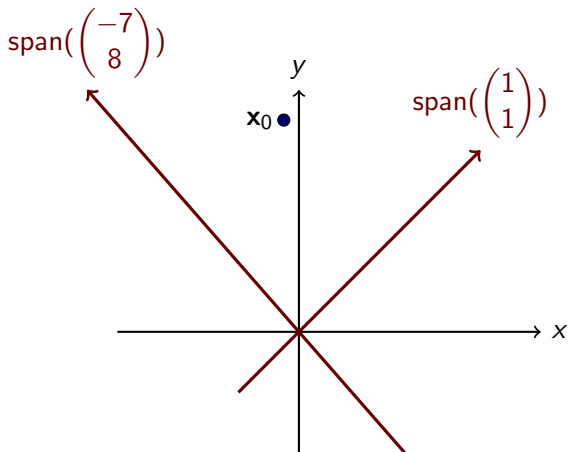
- ② Je-li \mathbf{x}_0 na přímce $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, -0.5 \cdot \mathbf{x}_0, (-0.5)^2 \cdot \mathbf{x}_0, (-0.5)^3 \cdot \mathbf{x}_0, \dots$

- ③ Je-li $\mathbf{x}_0 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, tedy jestliže platí rovnost

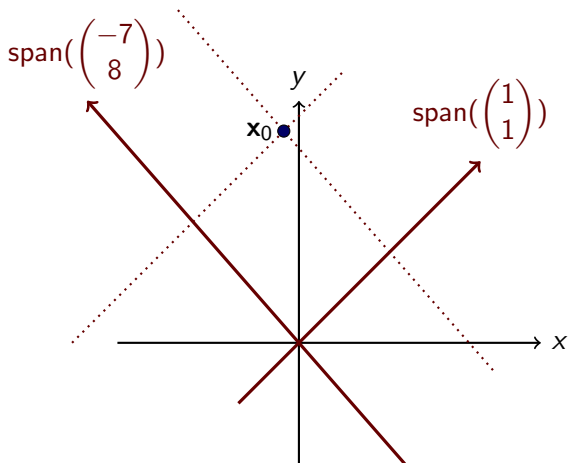
$$\text{coord}_B(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ potom } \text{coord}_B(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} a \\ (-0.5)^n \cdot b \end{pmatrix}.$$

Diagonalisací matice \mathbf{A} tedy získáváme o rekurentním procesu **úplný přehled**.

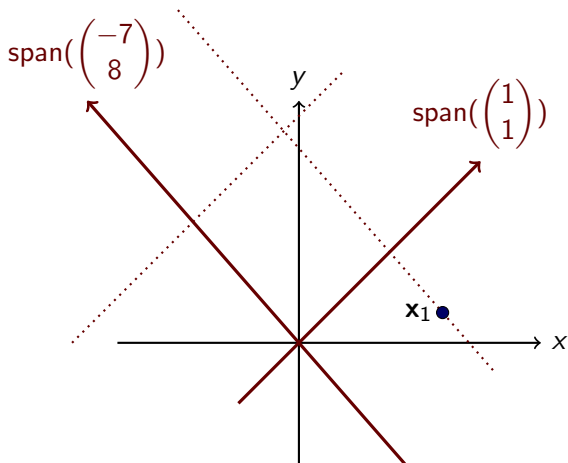
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



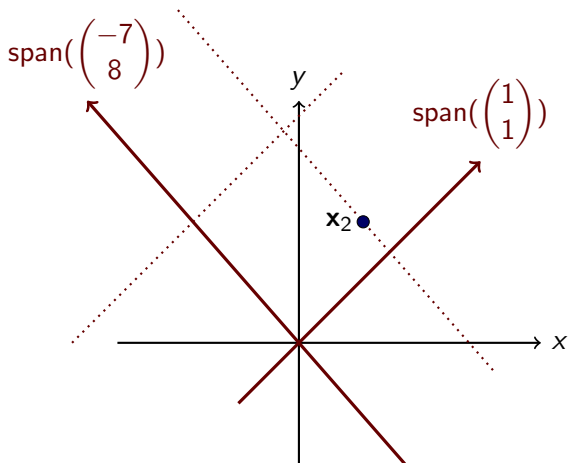
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Shrnutí dosavadních úvah

- 1 Pokud pro obecnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ najdeme bázi B , ve které \mathbf{A} je diagonální maticí, získáme v nové bázi úplný přehled o maticích tvaru \mathbf{A}^k , kde $k \geq 0$.

To je důležité například v následujících oblastech:

- 1 Teorie dynamických systémů.
- 2 Ekonomie (například tzv. Leontiefův input-output model).
- 3 Složitost rekursivních algoritmů (řešení rekurentních rovnic, viz příští přednášku).
- 4 Geometrie kvadratických útvarů, viz kapitolu 14.1 skript.
- 5 Funkce matic, viz příští přednášku.
- 6 Atd.

Hledání diagonální matice k matici \mathbf{A} se říká diagonalisace matice \mathbf{A} . Ne vždy zadanou matici diagonalisovat půjde.

- 2 Problém diagonalisace lze zformulovat (a řešit) pro obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$, kde L má konečnou dimenzi.

Definice

Pro lineární zobrazení $f : L \rightarrow L$ je $\lambda \in \mathbb{F}$ **vlastní hodnotou** (také: **vlastním číslem**), pokud existuje nenulový vektor \vec{x} , splňující rovnost $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

Každému takovému nenulovému vektoru \vec{x} říkáme **vlastní vektor** příslušný hodnotě λ .

Pozorování

Ať $f : L \rightarrow L$ je lineární zobrazení.

- 1 Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{F}$ platí: $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\} = \ker(f - \lambda \cdot \text{id})$.
Tudíž vlastní vektory příslušné hodnotě λ tvoří podprostor L .^a
- 2 λ je vlastní hodnota f právě tehdy, když $\text{eigen}(\lambda, f)$ je netriviální prostor.

^aŘíkáme mu **vlastní podprostor** příslušný λ , značíme jej $\text{eigen}(\lambda, f)$. Důvod: vlastní hodnotě se říká **eigenvalue**, vlastnímu vektoru **eigenvector**, vlastnímu podprostoru **eigenspace**. Německy: eigen=vlastní.

Připomenutí (základní vlastnosti podobnosti matic)

Řekneme, že dvě matice \mathbf{A} a \mathbf{B} typu $n \times n$ nad \mathbb{F} jsou si **podobné** (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici \mathbf{T} .

Podobné matice jsou maticemi **stejného** lineárního zobrazení, ale vzhledem k **jiné** bázi.

Platí:

- 1 $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$.
- 2 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
- 3 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$, potom $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$.

Definice (charakteristický polynom čtvercové matice)

At' \mathbf{A} je matice typu $n \times n$ nad \mathbb{F} , $n \geq 1$. Výrazu $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)$ říkáme **charakteristický polynom** matice \mathbf{A} (značení: $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$).

Poznámky (pro matice typu $n \times n$ nad \mathbb{F})

- 1 $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je polynom stupně n . Tudíž má v \mathbb{F} nanejvýš n kořenů (i s násobnostmi). Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad \mathbb{R} nemá polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ v \mathbb{R} žádný kořen.
- 2 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x)$.^a
Důvod:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - x\mathbf{E}_n) &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}x\mathbf{T}) = \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{T}) = \\ &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n). \end{aligned}$$

^aPozor: obrácená implikace neplatí, viz dále.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ je lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. Označme jako \mathbf{A}_f matici \mathbf{f} vzhledem k jakékoli bázi prostoru L . Potom $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastní hodnotou \mathbf{f} právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}_f - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$.

Důkaz.

Protože L má dimenzi n , je λ vlastní hodnotou \mathbf{f} právě tehdy, když $\text{def}(\mathbf{f} - \lambda \text{id}) > 0$. To nastane právě tehdy, když matice $\mathbf{A}_f - \lambda \mathbf{E}_n$ je singulární. ■

Poznámka

Předchozí tvrzení nezávisí na volbě báze prostoru L a tím pádem nezávisí na volbě matice \mathbf{A}_f .

Připomenutí: změnou báze změníme matici \mathbf{A}_f na matici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici \mathbf{T} .

Příklad (matice mohou mít stejné vlastní hodnoty, ale různé vlastní podprostory)

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad \mathbb{R} .

Potom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x - 3)^2 \cdot (x - 2)$.

- 1 Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:

$$\text{eigen}(3, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- 2 Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:

$$\text{eigen}(2, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Příklad (pokrač.)

Pozor! Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ je $\text{char}_{\mathbf{B}}(x) = \text{char}_{\mathbf{A}}(x)$. Ale

$$\text{eigen}(3, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ a } \text{eigen}(2, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Tedy: \mathbf{A} a \mathbf{B} mají **stejná vlastní čísla** (i s násobnostmi), ale **různé vlastní podprostory**.

Problém diagonalisace

Pro matici \mathbf{A} typu $n \times n$ nad \mathbb{F} chceme rozhodnout, zda $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ je **diagonální matice**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nebo ve sloupcovém zápisu

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2, \lambda_3 \cdot \mathbf{e}_3, \dots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n)$$

Myšlenka nalezení matic \mathbf{T} a \mathbf{D} v rovnici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}$

Atž $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$.

- 1 Rovnost $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}$ platí právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ a matice \mathbf{T} je regulární.
- 2 Pro regulární matici $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ právě tehdy, když platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \dots, n$.

Shrnuto: rovnost $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ platí právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \dots, n$.
 To jest: j -tý sloupec \mathbf{t}_j matice \mathbf{T} je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_j matice \mathbf{A} .
- Matice $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ je regulární.

Pozorování

Dva vlastní vektory, příslušející dvěma **různým** vlastním hodnotám, jsou lineárně nezávislé.

Platí-li

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_1} = \lambda_{j_1} \cdot \mathbf{t}_{j_1} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{t}_{j_2}$$

pak z rovnosti $a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \mathbf{0}$ plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{0} \\ &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot (a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2}) \\ &= a_1 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_1}}_{\neq \mathbf{0}} + a_2 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_2}}_{=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

tedy $a_1 = 0$.

Rovnost $a_2 = 0$ se dokáže analogicky.

Problém

Existuje dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů pro **stejnou** vlastní hodnotu?

Věta (charakterisace diagonalisovatelných matic nad \mathbb{F})

Pro matici \mathbf{A} typu $n \times n$ nad \mathbb{F} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 \mathbf{A} je diagonalisovatelná, tj $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici \mathbf{D} .
- 2 Charakteristický polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze v \mathbb{F} rozložit na součin lineárních faktorů a platí: násobnost λ jako kořene $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.^a

^aNásobnosti λ jako kořene $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ se někdy říká **algebraická násobnost** λ , číslu $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$ se někdy říká **geometrická násobnost** λ .

Důkaz.

Bez důkazu (nemáme vybudovanou teorii polynomů nad obecným tělesem \mathbb{F}). Pro zájemce: Věta 10.4.8 **skript**. ■

Příklad (nad \mathbb{R})

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ splňují:

- 1 $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.
- 2 Protože $\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2$ a $\dim(\text{eigen}(2, \mathbf{A})) = 1$, platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici \mathbf{D} .
- 3 Protože $\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{B})) = 1$ a $\dim(\text{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$, neplatí $\mathbf{B} \approx \mathbf{D}$ pro žádnou diagonální matici \mathbf{D} .

Ukázali jsme (mimo jiné): $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$, přestože $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x)$.

Příklad

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ nad \mathbb{R} platí $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$

a $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matice \mathbf{A} v kanonické bázi odpovídá lineárnímu zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y + 2z \\ -x + 4y - z \\ -4x + 4y - z \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ jde o podstatně jednodušší zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix}$$