Abstraktní skalární součin

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1 a 12.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

1. V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.[a]
2. Skalární součin zavedeme axiomaticky. Odvodíme geometrický význam skalárního součinu.[b]

   Axiomatické zavedení skalárního součinu nám umožní převést známé významy z $\mathbb{R}^n$ (kolmost, délka vektoru, atd) do obecných lineárních prostorů se skalárním součinem.

[a] Velmi málo řekneme i o lineárních prostorech nad $\mathbb{C}$. Důvod: fyzika a kvantové počítání.

[b] Slogan: skalární součin je míra „odchylky“ dvou vektorů.

Příští přednáška

1. Popis obecných skalárních součinů v prostorech $\mathbb{R}^n$.

Definice (reálný skalární součin)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci $\langle - \mid - \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$ říkáme skalární součin,[a] pokud platí následující, pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$:

1. Komutativita: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle$.
2. Linearita ve druhé souřadnici: zobrazení $\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \to \mathbb{R}$ je lineární.
3. Positivní definitnost: $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.

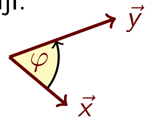
[a] Naše značení pro skalární součin je obvyklé ve fyzice (tzv bra-ket notation nebo Diracova notace) a má jisté výhody. Značení $\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro skalární součin nebudeme používat! Důvod: přetížení značky $\cdot$ pro součin.

Poznámka (skalární součin pro prostory nad $\mathbb{C}$)

V případě lineárního prostoru nad $\mathbb{C}$ mluvíme o skalárním součinu, pokud $\langle - \mid - \rangle : L \times L \to \mathbb{C}$ je positivně definitní, lineární ve druhé souřadnici a místo komutativity platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle}$.

Příklady skalárních součinů

1. Skalární součin v prostoru orientovaných úseček: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$, kde $\|\vec{x}\|$ a $\|\vec{y}\|$ jsou délky úseček $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a φ je úhel, který svírají:[a]



Tento skalární součin splňuje všechny tři požadované vlastnosti: je komutativní, lineární ve druhé souřadnici a positivně definitní.

[a] Důležitá poznámka: v další části přednášky ukážeme, že pro libovolný skalární součin je možné definovat pojmy délky $\|\vec{x}\|$ vektoru $\vec{x}$ (také: normy vektoru $\vec{x}$) a úhlu φ mezi dvěma vektory tak, že platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$.

V prostoru s obecným skalárním součinem se tudíž budeme moci „chovat stejně" jako v klasické geometrii. Bude tak například platit Pythagorova věta, a podobně.

Příklady skalárních součinů (pokrač.)

2. Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$.
3. Standardní skalární součin není jediný skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
   Například[a] $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$ je skalární součin v $\mathbb{R}^2$. (Jde o úmorné, ale užitečné cvičení.)
4. Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i$.
   Pozor! Platí rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle}$, nikoli $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle$.

[a] K tomuto skalárnímu součinu se vrátíme koncem této přednášky. Po příští přednášce budeme schopni (téměř) okamžitě uvidět, že jde o skalární součin. Budeme také schopni popsat všechny možné skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení (nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)

Platí $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$.

Důkaz.

Platí $0 \leqslant \langle \vec{x} + a\vec{y} \mid \vec{x} + a\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}_{C} + a\underbrace{2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}_{B} + a^2 \underbrace{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}_{A}$, pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Tudíž $B^2 - 4AC \leqslant 0$, neboli $B^2 \leqslant 4AC$. Z toho nerovnost $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$ plyne okamžitě. ■

Jednoduchý, ale důležitý důsledek: úhel mezi vektory

Pro nenulové $\vec{x}$, $\vec{y}$ platí $-1 \leqslant \underbrace{\dfrac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}}}_{= \cos\varphi \text{ pro jediné } \varphi \in [0;\pi]} \leqslant 1$. Úhlu φ říkáme úhel mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Definice (norma vektoru)

Normu vektoru $\vec{x}$ definujeme[a] jako $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$.

[a] Nerovnost C-S-B tedy můžeme zapsat jako $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Tvrzení (vlastnosti normy)

Platí:

1. $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, $\|\vec{x}\| = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.
2. $\|a \cdot \vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$.
3. Trojúhelníková nerovnost: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Důkaz.

Jediná netriviální vlastnost je trojúhelníková nerovnost. Upravujte: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$ a použijte nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski:
$\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$.
Celkově: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leqslant (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$, tedy $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ∎

Důsledek

Pro nenulová $\vec{x}$, $\vec{y}$ platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$.

Poznámka

Předchozí důsledek je stejná rovnost, která platí pro „klasický“ skalární součin v prostoru orientovaných úseček!

Definice (ortogonalita vektorů)

Pokud $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$, mluvíme o ortogonálních (také: navzájem kolmých) vektorech.

Několik poznámek o ortogonalitě

1. Neřekli jsme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou na sebe kolmé, pokud svírají úhel $\frac{\pi}{2}$. Taková úvaha platí pouze pro nenulové vektory. Chceme ovšem hovořit i o nulovém vektoru, proto jsme definovali kolmost rovností $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

2. Pozor: nulový vektor $\vec{o}$ je kolmý na každý vektor $\vec{x}$.
   Důvod: z definice skalárního součinu víme, že zobrazení

   $$\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \to \mathbb{R}$$

   je lineární. Proto $\langle \vec{x} \mid - \rangle$ musí poslat nulový vektor na nulový vektor, neboli musí platit rovnost

   $$\langle \vec{x} \mid \vec{o} \rangle = 0$$

   Obráceně: jestliže $\vec{x}$ je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.
   Důvod: podle předpokladu je $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$. Z definice skalárního součinu plyne, že $\vec{x} = \vec{o}$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

3. Chceme-li pro nějaký vektor $\vec{x}$ ověřit, že $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$ pro každý vektor $\vec{v}$ ze $\operatorname{span}(M)$, stačí ověřit, že platí $\langle \vec{x} \mid \vec{m} \rangle = 0$ pro všechny vektory $\vec{m}$ z M.

   Důvod: pro obecný vektor $\vec{v}$ ze $\operatorname{span}(M)$ nastane jedna ze dvou situací:

   1. $\vec{v} = \vec{o}$. Pak $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$.
   2. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{m}_i$ pro nějaká a_i z $\mathbb{R}$ a nějaká $\vec{m}_i$ z M. Pak
   $$\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{x} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{m}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{m}_i \rangle$$

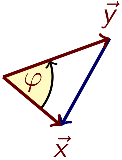
      Jestliže tedy je $\langle \vec{x} \mid \vec{m}_i \rangle = 0$ pro každé i, platí $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$.

   Slogan: ortogonalitu stačí ověřovat pouze pro množinu generátorů podprostoru.

Ortogonalitou se budeme podrobněji zabývat v příštích přednáškách.

Příklady (geometrie prostoru se skalárním součinem)

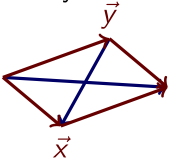
1. Kosinová věta: Nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují trojúhelník



Platí: $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \underbrace{2\cdot\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle}_{2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\varphi}$.

Případu, kdy $\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle = 0$, se říká Pythagorova věta.

2. Rovnoběžníková rovnost: Dva nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují strany rovnoběžníka s úhlopříčkami $\vec{x}-\vec{y}$ a $\vec{x}+\vec{y}$.



Platí: $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$.

Upravujte:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}-\vec{y} \mid \vec{x}-\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x}+\vec{y}\rangle = \dots$$

Poznámky (vztah skalárního součinu, normy a metriky)

Skalární součin indukuje normu a ta indukuje metriku (také: distanci) na množině L. Jde o funkci $d : L \times L \to \mathbb{R}$, která splňuje:

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geqslant 0$, rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{y}$.
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Stačí definovat $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

O prostoru L s metrikou d mluvíme jako o metrickém lineárním prostoru.

Pro lineární prostory platí:[a] skalární součin $\rightsquigarrow$ norma $\rightsquigarrow$ metrika.

---

[a]Obrácené implikace neplatí. Například $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \neq y, \\ 0, & \text{když } x = y, \end{cases}$ je metrika na $\mathbb{R}$, která nevznikla z žádné normy na $\mathbb{R}$ (tj $\|x\| = d(0, x)$ není norma). Norma $\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \| = |x_1| + |x_2|$ na $\mathbb{R}^2$ nevznikla z žádného skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$, protože nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost.

Poznámka

Předchozí úvahy říkají, že prostory se skalárním součinem se chovají tak, jak jsme zvyklí z klasické geometrie. Další příklad ukazuje, že klasická geometrie nemusí být vždy vhodná.

Příklad (nikoli positivně definitní „skalární součin“)

Na $\mathbb{R}^4$ definujte $\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = tt' - xx' - yy' - zz'$. Protože $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$, nejde o positivně definitní „skalární součin“.

Tento „skalární součin“ je velmi důležitý v teorii relativity. Příslušnému pojmu „vzdálenosti“ vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^4$ se říká Lorentzova metrika Minkowského časoprostoru.[a]

[a] V tomto časoprostoru je rychlost světla c rovna 1.

Příklad (Lorentzova transformace)

Pohyb podsvětelnou rychlostí v ve směru osy x v Minkowského časoprostoru je lineární zobrazení $\mathbf{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, pro které platí

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \cdot (t - vx) \\ x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{kde } 0 \leqslant v < c = 1 \text{ a } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^4$ má zobrazení $\mathbf{L}$ matici

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -v \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -v \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\varphi = \ln(\gamma(1 + v))$. Pohyb ve směru osy x podsvětelnou rychlostí v v Minkowského časoprostoru lze tedy interpretovat jako rotaci (v rovině dané osami t a x) o úhel φ v hyperbolické geometrii.

Příklad (rotace a standardní skalární součin)

Připomenutí: rotace o úhel α je $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde[a]

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí: $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}\|$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}\|$.

Ukázali jsme: rotace zachovává standardní skalární součin, normu a metriku.

[a] Povšimněme si: $\mathbf{R}_\alpha^T = \mathbf{R}_\alpha^{-1}$.

Tvrzení

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{A}$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbf{A}$ je regulární a platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz.

Z (1) plyne (2):[a] $\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$, takže $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.
Ze (2) plyne (1):
$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$. ■

[a] Připomenutí: pro Kroneckerův symbol δ platí $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ii} = 1$.

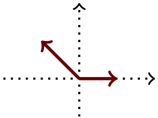
Poznámka (základní transformace prostoru $\mathbb{R}^2$)

Projekce na osy a změna měřítka nezachovávají standardní skalární součin! Rotace skalární součin zachovávají (viz předchozí příklad). Reflexe podle os x a y standardní skalární součin zachovávají.

Příklad (netradiční skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$ v $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

To znamená, že náš skalární součin „vidí“ vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jako navzájem kolmé:



To může být velmi praktické. Jak tedy rozpoznat obecný skalární součin? Všimněme si, že náš součin je zadán jistou maticí **G**:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$$

Co dál?

Budeme chtít pochopit, které matice $\mathbf{G}$ zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Uvidíme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ přesně odpovídají maticím, kterým říkáme positivně definitní.