

Charakterisace skalárních součinů v \mathbb{R}^n

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1, 12.2 a 12.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad \mathbb{R} .
- 2 Charakterisace matic, které zadávají skalární součiny v prostoru \mathbb{R}^n .
- 3 Konstrukce skalárních součinů požadovaných vlastností.

Příští přednášky ke skalárnímu součinu

- 1 Ortogonální báze a ortonormální báze.
- 2 Ortogonalizační proces a ortonormalizační proces.
- 3 Ortogonální projekce a ortogonální rejeckce.

Připomenutí (dva různé skalární součiny v \mathbb{R}^2)

1 Standardní skalární součin:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= (x_1 \quad x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 „Nezvyklý“ skalární součin:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 \\ &= (x_1 \quad x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V obou případech je součin **zadán** jistou maticí typu 2×2 . Je to náhoda?

Co dál?

Ukážeme, že skalární součiny v \mathbb{R}^n odpovídají přesně těm čtvercovým maticím, kterým říkáme pozitivně definitní.

Definice (positivně definitní matice)

Řekneme, že matice \mathbf{G} typu $n \times n$ nad \mathbb{R} je **positivně definitní**, když existuje matice \mathbf{R} s lineárně nezávislými sloupci tak, že $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

Poznámky

- 1 Protože $\mathbf{G}^T = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{G}$, je každá pozitivně definitní matice \mathbf{G} **symetrická**.

Poznámky (pokrač.)

- 2 Positivně definitní matice \mathbf{G} zobecňují kladná reálná čísla: matice \mathbf{R} je „druhá odmocnina“^a matice \mathbf{G} .

Opravdu: Matice $\mathbf{G} = (g)$ typu 1×1 je positivně definitní právě tehdy, když $g > 0$.

- 1 At' $\mathbf{G} = (g) = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$. Pak $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ a platí $g = r_1^2 + \dots + r_n^2$.

Protože jediný sloupec \mathbf{R} musí být lineárně nezávislý, je $g > 0$.

- 2 Je-li $g > 0$, platí $(g) = (\sqrt{g})^T \cdot (\sqrt{g})$. Protože $\sqrt{g} > 0$, je jediný sloupec matice $\mathbf{R} = (\sqrt{g})$ lineárně nezávislý. Matice \mathbf{G} je tudíž positivně definitní.

^aJde jen o slogan: matice \mathbf{R} není určena jednoznačně. Například platí

$$(4) = (2)^T \cdot (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Věta (charakterisace pozitivně definitních matic)

Pro matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ nad \mathbb{R} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 \mathbf{G} je pozitivně definitní.
- 2 Matice \mathbf{G} je symetrická a determinanty všech matic $\mathbf{G}_k = (g_{ij})_{i=1,\dots,k,j=1,\dots,k}$, kde $1 \leq k \leq n$, jsou kladné.^a
- 3 Matice \mathbf{G} je symetrická a nerovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ platí pro všechna \mathbf{x} z \mathbb{R}^n (rovnost platí pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
- 4 Matice \mathbf{G} je symetrická a $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné.
- 5 Existuje **regulární** matice \mathbf{R} tak, že platí $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

^aTento test pozitivní definitnosti budete využívat v analýze pro určování lokálních minim funkcí více proměnných.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký, pro zájemce: Tvzení 12.3.4 **skript**).

Poznámka o Choleskyho faktorizaci — **nepovinné**

- 1 Připomenutí **definice**: \mathbf{G} je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde \mathbf{R} má **lineárně nezávislé sloupce**.
- 2 Předchozí **věta**: \mathbf{G} je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde \mathbf{R} je **regulární**.
- 3 **Zesílení věty**: \mathbf{G} je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde \mathbf{R} je **regulární v horním blokovém tvaru**.

Rovnosti $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ pro regulární matici \mathbf{R} v horním blokovém tvaru se říká **Choleskyho faktorizace** matice \mathbf{G} .

Příklad Choleskyho faktorizace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 12 \\ 8 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Choleskyho faktorizaci lze nalézt algoritmem, viz **skripta**, Příklad 12.3.6. Tento algoritmus je **nepovinný**.

Příklady

- 1 Protože $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T \cdot \mathbf{E}_n$, je jednotková matice \mathbf{E}_n pozitivně definitní.

Připomeňme: \mathbf{E}_n zadává standardní skalární součin

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \text{ v } \mathbb{R}^n.$$

- 2 Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní podle předchozí

věty: \mathbf{G} je symetrická a platí nerovnosti $\det(\mathbf{G}_1) = \det(1) > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) > 0$.

Připomeňme: \mathbf{G} zadává „nezvyklý“ skalární součin

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} \text{ v } \mathbb{R}^2.$$

Příklady (pokrač.)

3 Matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

není pozitivně definitní podle předchozí věty: platí
 $\det(\mathbf{G}_1) > 0$, $\det(\mathbf{G}_2) < 0$, $\det(\mathbf{G}_3) > 0$, $\det(\mathbf{G}_4) < 0$.

Připomeňme (minulá přednáška): \mathbf{G} zadává „skalární součin“
 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v Minkowského časoprostoru \mathbb{R}^4 .

Věta (obecný tvar skalárního součinu v \mathbb{R}^n)

- 1 Ať \mathbf{G} je pozitivně definitní matice typu $n \times n$ nad \mathbb{R} .
Potom maticový součin

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

definuje skalární součin v \mathbb{R}^n .

- 2 Každý skalární součin $\langle - | - \rangle$ v \mathbb{R}^n definuje pozitivně definitní^a matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$, kde $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle$.
Potom platí rovnost $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

^aMatici \mathbf{G} říkáme **metrický tensor** (také: **Gramova matice**) skalárního součinu $\langle - | - \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Příklad (popis všech skalárních součinů v \mathbb{R}^2)

Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když platí:

- 1 \mathbf{G} je symetrická matice, tj. když platí $c = b$.
- 2 $\det(\mathbf{G}_1) = a > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) = ad - b^2 > 0$.

To znamená: výraz

$$ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + dx_2y_2$$

zadává skalární součin $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ v \mathbb{R}^2 právě tehdy, když platí nerovnosti $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

Příklad (jednotková kružnice pro skalární součin v \mathbb{R}^2)

Pro pozitivně definitní^a matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ a příslušný skalární součin $\langle - | - \rangle$ je množina^b

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$$

jednotková kružnice. Rovnice této kružnice je

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = 1$$

a my ukážeme, že v **bázi vlastních vektorů** matice \mathbf{G} , jde o elipsu.

^aPřipomenutí: platí $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

^bPřipomenutí: $\| - \|$ je norma vytvořená skalárním součinem

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

① Positivně definitní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom $\text{char}_{\mathbf{G}}(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - b^2)$ s diskriminantem $D = (a - d)^2 + 4b^2 \geq 0$.

② V případě $D = (a - d)^2 + 4b^2 = 0$ platí $b = 0$ a $a = d > 0$.

Pak matice \mathbf{G} je diagonální, vlastní vektory jsou \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2$$

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

③ V případě $D = (a - d)^2 + 4b^2 > 0$ rozlišíme dva případy:

① $b = 0$. Pak \mathbf{G} je diagonální a $a \neq d$. Vlastní vektory \mathbf{G} jsou \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{ad}}\right)^2$$

protože $d > 0$, neboť \mathbf{G} je pozitivně definitní. Jde tedy o elipsu.

② $b \neq 0$. Matice \mathbf{G} pak má dvě **různé kladné** vlastní hodnoty

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{D}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{D}}{2}$$

V bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vlastních vektorů má rovnice jednotkové kružnice tvar

$$\left(\frac{t_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2$$

Jde tedy o elipsu.

Připomenutí

Minulá přednáška: každý skalární součin vytváří normu.

Je-li $\langle - | - \rangle$ skalární součin na \mathbb{R}^n , pak

- 1 vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou **ortogonální** (také: **navzájem kolmé**), pokud $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0$,
- 2 **norma** (také: **velikost**) vektoru \mathbf{x} je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$,
- 3 vektor \mathbf{x} je **normovaný**, pokud $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Tvrzení (kanonická báze \mathbb{R}^n a standardní skalární součin v \mathbb{R}^n)

Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ a kanonickou bázi

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v \mathbb{R}^n platí:^a $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases}$.

^aTakovým bázím budeme říkat **ortonormální** a obecně je budeme studovat příště. To jest: vektory takové báze jsou na sebe navzájem kolmé a každý vektor takové báze má normu 1.

Věta (každou bázi \mathbb{R}^n lze považovat za ortonormální)

Ať $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze \mathbb{R}^n . Potom existuje **jediný** skalární součin $\langle - | - \rangle$ takový, že $\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Důkaz.

Označme $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, připomenutí (téma 5B):

$\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, čili $\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, pro vš $i = 1, \dots, n$.

- Existence hledaného skalárního součinu.

Definujte $\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_n \mapsto B}$. Potom matice \mathbf{G} je pozitivně definitní a platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle &= \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j \\ &= \underbrace{\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T}_{=(\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i)^T = \mathbf{e}_i^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_j}_{=\mathbf{e}_j} \\ &= \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Důkaz (pokrač.)

- ② Jednoznačnost hledaného skalárního součinu.

At' $\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. Ukážeme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

Opravdu: platí $\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{b}_j = 0$ pro vš. i, j .

To znamená $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i)^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ pro vš. i, j , neboli $\mathbf{e}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro vš. i, j .

Ukázali jsme rovnost $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \mathbf{O}_{n,n}$.

Protože $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ i $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T$ jsou regulární, platí $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = \mathbf{O}_{n,n}$.

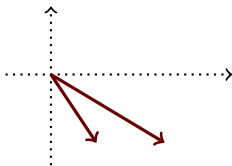
Tudíž $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.



Příklad

Najděte skalární součin v \mathbb{R}^2 takový, aby vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ byly navzájem kolmé a každý měl normu 1.

Obrázek:



Skalární součin nalezneme podle předchozího tvrzení:

$$\textcircled{1} \text{ Pro } \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ je } {}^a (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tudíž } \mathbf{G} = ((\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1})^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 29 \end{pmatrix}.$$

^aInverzi matice $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ nalezneme nejrychleji pomocí adjungované matice.

Příklad (pokrač.)

- 2 Hledaný skalární součin je

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2.$$

3 $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 0.$$

4 $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 2 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

5 $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$

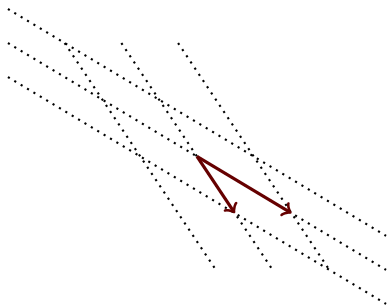
$$\frac{18}{81} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 5 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

K čemu jsou takové výpočty dobré?

Skalární součin

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2$$

z předchozího příkladu „vidí“



jako jednotkovou pravouhlou síť.

Co zatím v \mathbb{R}^n umíme

Pro **zadanou** bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n **umíme sestrojít skalární součin** $\langle - | - \rangle$ v \mathbb{R}^n tak, že $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je ortonormální báze vzhledem k $\langle - | - \rangle$.

Příště se v \mathbb{R}^n naučíme

Pro **zadanou** bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n a **zadaný skalární součin** $\langle - | - \rangle$ v \mathbb{R}^n **nalezneme novou bázi** $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$, která je ortonormální vzhledem k $\langle - | - \rangle$.

Hledaná báze bude **navíc splňovat** rovnost $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$ pro všechna $k = 1, \dots, n$.

K tomu bude zapotřebí **zavedení nových pojmů**: ortogonální projekce a ortogonální rejekce.