

Ortogonalisace a ortogonální projekce

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Definice skalárního součinu v lineárních prostorech nad \mathbb{R} .
- 2 Úplný popis skalárních součinů v prostoru \mathbb{R}^n .

Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad \mathbb{R} .
- 2 Ortogonalní báze a ortonormální báze.
- 3 Ortogonalní projekce. Ortogonalisace a ortonormalisace.

Důležitá aplikace — viz příští přednášku

- 1 Metoda nejmenších čtverců.

Připomenutí vlastností ortogonality (minulé přednášky)

Platí-li $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, říkáme, že vektory \vec{x} a \vec{y} jsou **ortogonální** (také: **navzájem kolmé**).

- 1 **Pozor**: nulový vektor \vec{o} je kolmý na každý vektor \vec{x} .
Obráceně: jestliže \vec{x} je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.
- 2 Abychom ukázali, že rovnost $\langle \vec{x} | \vec{v} \rangle = 0$ platí pro každý vektor \vec{v} ze $\text{span}(M)$, **stačí ukázat**, že všechny vektory \vec{m} z M platí rovnost $\langle \vec{x} | \vec{m} \rangle = 0$.

Speciální případ výše uvedeného je:^a

At' $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báze lineárního podprostoru W lineárního prostoru L . Jestliže platí $\langle \vec{x} | \vec{b}_i \rangle = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, potom platí $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ pro všechny vektory \vec{w} z W .

^aTento speciální případ několikrát (bez dalších komentářů) v dnešní přednášce použijeme.

Tvrzení (lineární nezávislost ortogonální množiny vektorů)

At' M je jakákoli množina **nenulových** vektorů s vlastností $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ pro jakékoli různé vektory $\vec{x}, \vec{y} \in M$.^a Pak M je lineárně nezávislá množina.

^aTakové množině říkáme **ortogonální množina**.

Důkaz.

At' $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je jakákoli konečná podmnožina M . At'
 $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$. Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$0 = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{o} \rangle = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_i \rangle = a_{i_0} \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle.$$

Protože $\vec{x}_{i_0} \neq \vec{o}$, platí $\langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle \neq 0$. Proto $a_{i_0} = 0$. ■

Několik sloganů

- 1 Jestliže $\dim(L) = n$, potom každá ortogonální množina v L má nejvýše n prvků.

Slogan: v prostoru dimenze n může existovat maximálně n navzájem na sebe kolmých nenulových vektorů.

- 2 Ortogonální množině v L , která tvoří bázi L , říkáme **ortogonální báze**.

Slogan:^a ortogonální báze je pravouhlý souřadnicový systém.

- 3 Každou bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ lze **normalisovat**: v bázi $(\frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}, \dots, \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|})$ mají všechny vektory normu 1.

Slogan: normální báze má jednotkové úseky na jednotlivých souřadnicových osách.

^a**Pozor:** jde jen o slogan. Víme, že například leckterý skalární součin v rovině může jako ortogonální vidět vektory, které „ve skutečnosti“ nesvírají pravý úhel.

Definice (ortonormální báze, čili normální a ortogonální báze)

Bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem, která splňuje rovnost $\langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$,^a říkáme **ortonormální**.

^aKroneckerův symbol δ splňuje: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Poznámky

- 1 Kanonická báze $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
- 2 Pro jakoukoli bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n existuje jednoznačně určený skalární součin, ve kterém je tato báze ortonormální (viz minulou přednášku).

Stejnou větu lze dokázat pro obecné prostory nad \mathbb{R} konečné dimenze. To dokazovat **nebudeme**.

- 3 Ortonormální báze jsou důležité: umožňují „zpříjemnit“ řadu výpočtů. Viz dále.

Tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním

součinem. Pak $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$, čili $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 | \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n | \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$.

Důkaz.

Definujeme: $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$. Musíme ukázat: $\vec{y} = \vec{x}$.

Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} | \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_{i_0} | \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle.$$

Takže $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$, pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Kdyby $\vec{x} - \vec{y} \neq \vec{o}$, byla by $(n+1)$ -prvková množina nenulových vektorů $\{\vec{x} - \vec{y}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ lineárně nezávislá.

To není možné: proto je $\vec{y} = \vec{x}$.

Důsledek (skalární součin v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním

součinem. Pak platí:^a $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{y} \rangle$.

^aPodle předchozího to znamená: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$, kde $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{coord}_B(\vec{y}) = \mathbf{y}$. **Slogan:** skalární součin v ortonormální bázi se počítá jako standardní skalární součin souřadnic.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \mid \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j | \vec{y} \rangle \cdot \delta_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i | \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$



Poznámka pro ty, kteří chtějí vidět souvislosti (nepovinné)

Předchozí dvě tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi a výpočet skalárního součinu v ortonormální bázi) jsou pouhou instancí toho, že pro ortonormální bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru L tvoří seznam

$$B^* = (\langle \vec{b}_1 | - \rangle, \dots, \langle \vec{b}_n | - \rangle)$$

bázi duálního prostoru L^* , která je **duální bází** k bázi B .

Více se lze dozvědět v kapitole 3.5 **skript**.

Zde se objevují výhody Diracovy (také: bra-ket) notace pro skalární součin. Ve fyzice se vektor \vec{x} často píše jako $|\vec{x}\rangle$ (čteme: **ket** \vec{x}). Příslušný kovektor se píše jako $\langle \vec{x}|$ (čteme: **bra** \vec{x}). Skalární součin $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ je pak aplikací kovektoru $\langle \vec{x}|$ na vektor $|\vec{y}\rangle$. Tudíž $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ je **bra-ket**^a \vec{x} a \vec{y} .

^aSamozřejmě: bra-ket je jazyková hříčka, správně by mělo být **bracket**.

Další důsledek (úhly vektoru se souřadnicovými osami)

At' $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. At' vektor \vec{x} je **nenulový**. Potom pro úhel φ_{i_0} , který vektor \vec{x} svírá se souřadnicovou osou \vec{b}_{i_0} , platí rovnost^a

$$\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}. \text{ Navíc platí } \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = 1.$$

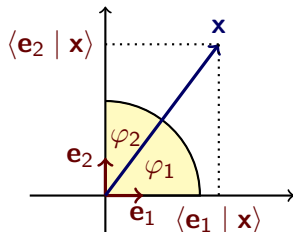
^a**Všimněme si:** tvrdíme, že $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle$, tj. i_0 -tá souřadnice vektoru \vec{x} vzhledem k bázi B , se počítá jako součin $\|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$. To je zobecnění známého faktu z elementární geometrie roviny (viz další stranu).

Důkaz.

Protože $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle = \underbrace{\|\vec{b}_{i_0}\|}_{=1} \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$, platí $\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}$.

$$\text{Dále: } \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} = 1. \quad \blacksquare$$

Předchozí tvrzení v rovině s ortonormální bází (e_1, e_2)



$$\cos \varphi_1 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle e_1 | x \rangle}{\|x\|}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle e_2 | x \rangle}{\|x\|}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ čili } \cos \varphi_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \sin \varphi_1$$

$$\text{Tudíž } \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1.$$

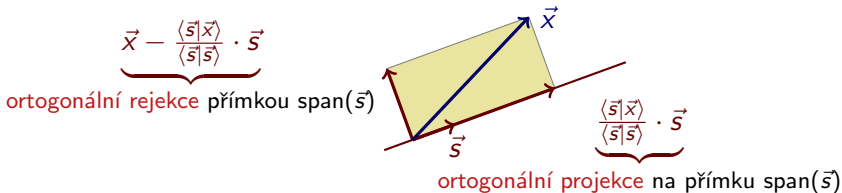
Ortogonalní projekce na přímku a ortogonální rejekce přímku

Ať $\vec{s} \neq \vec{o}$ je vektor v prostoru L se skalárním součinem $\langle - | - \rangle$.
Potom pro každý vektor \vec{x} platí:

- 1 Vektor $\frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ zjevně leží na přímce $\text{span}(\vec{s})$.
- 2 Vektor $\vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ je kolmý na přímce \vec{s} , protože platí

$$\langle \vec{s} | \vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s} \rangle = \langle \vec{s} | \vec{x} \rangle - \underbrace{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle \cdot \frac{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}}_{=1} = 0$$

Dostáváme tedy **ortogonalní rozklad^a** vektoru \vec{x} :

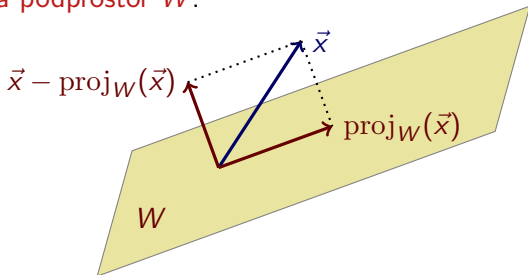


^aSlovník: **projekce**=promítnutí, **rejekce**=odmítnutí.

Zobecnění: projekce na podprostor a rejkce podprostorem

Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať \vec{x} je libovolný vektor v L .

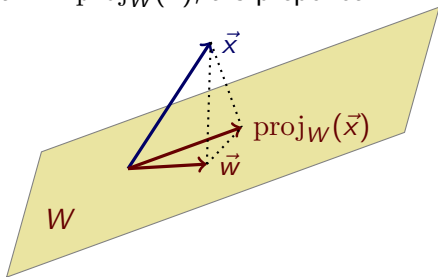
Vektoru $\text{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W , říkáme **ortogonální projekce** vektoru \vec{x} na podprostor W .



Vektoru $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ budeme říkat **ortogonální rejkce** vektoru \vec{x} **podprostorem** W a budeme jej značit $\text{rej}_W(\vec{x})$.

Ortogonalní projekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor \vec{x} , který neleží ve W , a pro jakýkoli vektor \vec{w} , který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy **pro všechny vektory** \vec{w} z W platí^a

$$\|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2$$

^aNa této nerovnosti je založena **metoda nejmenších čtverců**, viz téma 11A.

Věta (ortogonalní projekce na podprostor s ortogonalní bází)

Ať $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ je konečná neprázdná **ortogonalní** množina vektorů. Označme $W = \text{span}(M)$. Pro libovolný vektor \vec{x} je

$$\text{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \text{proj}_{\text{span}(\vec{u}_i)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$

ortogonalní projekce vektoru \vec{x} na podprostor W .

Důkaz.

Evidentně: $\text{proj}_W(\vec{x})$ leží ve W .

Pro každé $i_0 = 1, \dots, k$ platí $\langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle = 0$, protože:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle &= \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \text{proj}_W(\vec{x}) \rangle = \\ \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i \rangle &= \\ \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \sum_{i=0}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{u}_i \rangle &= \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} | \vec{x} \rangle = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ortogonalizační proces (Gram-Schmidt)

Každou bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem lze převést na bázi $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ s následujícími vlastnostmi:

- 1 C je **ortogonální**, tj $\langle \vec{c}_i | \vec{c}_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$.
- 2 Pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$.

Důkaz.

Definujeme^a

$$\vec{c}_1 := \vec{b}_1, \quad \vec{c}_{k+1} := \underbrace{\text{rej}_{\text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}(\vec{b}_{k+1})}_{\text{rejekce vektoru } \vec{b}_{k+1} \text{ podprostorem } \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}$$

Díky definici je splněno $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$, pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

První podmínka je splněna z definice ortogonální rejekce. ■

^aSlogan: Gram-Schmidt je posloupnost postupných ortogonálních rejekcí.

Poznámka (ortonormalizační proces)

Pokud je $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ ortogonální báze^a prostoru L , je seznam $(\frac{\vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|}, \dots, \frac{\vec{c}_n}{\|\vec{c}_n\|})$ **ortonormální** báze prostoru L (tj je ortogonální a norma každého prvku je 1):

$$\left\langle \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|} \mid \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{c}_i\| \cdot \|\vec{c}_j\|} \cdot \langle \vec{c}_i \mid \vec{c}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Každou konečnou bázi B v prostoru se skalárním součinem tedy lze ortonormalisovat:

- 1 Nejprve provedeme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces na bázi B . Dostaneme ortogonální bázi C .
- 2 Ortogonální bázi C znormalisujeme výše uvedeným postupem.

^aEvidentně pro každé i platí $\|\vec{c}_i\| \neq 0$, protože C je báze.

Příklad (ortogonalisace vektorů — Gram-Schmidt)

Vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně

nezávislé v \mathbb{R}^4 . Příslušnou bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ podprostoru W dimenze 3 označíme B .

Báze B **není ortogonální** vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v \mathbb{R}^4 . Bázi B nyní ortogonalisujeme. Výsledné vektory v nové (ortogonální) bázi označíme $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Budeme postupovat Gram-Schmidtovou metodou.

1 První vektor: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (pokrač.)

- ② Druhý vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik: protože skalární násobek nemění ortogonalitu,

$$\text{položíme } \mathbf{c}_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tím se zbavíme pozdějších nepříjemných výpočtů se zlomky.

Příklad (pokrač.)

- 3 Třetí vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Opět se zbavíme zlomků: $\mathbf{c}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Výpočet je u konce: seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ je hledaná ortogonální báze.

Příklad (normalisace ortogonální báze)

Normalisace ortogonální báze $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ podprostoru W v prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem je tvořena vektory

$$\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$