

# Matice ortogonální projekce a metoda nejmenších čtverců

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 a Dodatku C skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

## Minulá přednáška

- 1 Ortogonalizační proces (Gram-Schmidt).
- 2 Ortogonální projekce a ortogonální rejeckce.
- 3 Ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází.

## Dnešní přednáška

V této přednášce se zaměříme **pouze** na lineární prostory  $\mathbb{R}^n$  nad  $\mathbb{R}$ .

- 1 Výpočet matice ortogonální projekce na podprostor (s libovolnou bází) v  $\mathbb{R}^n$ .
- 2 Charakterisace matic ortogonálních projekcí v  $\mathbb{R}^n$ .
- 3 Aplikace projekcí na řešení soustav lineárních rovnic (metoda nejmenších čtverců).<sup>a</sup>

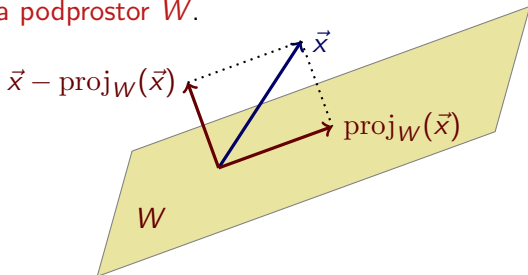
---

<sup>a</sup>Budeme se věnovat pouze nejjednodušší formě metody nejmenších čtverců v  $\mathbb{R}^n$  se **standardním skalárním součinem**. Vše je podrobně popsáno v tomto výtahu z přednášky.

## Připomenutí: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

Ať  $W$  je podprostor lineárního prostoru  $L$  se skalárním součinem, ať  $\vec{x}$  je libovolný vektor v  $L$ .

Vektoru  $\text{proj}_W(\vec{x})$ , který leží ve  $W$  a pro který je  $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$  kolmý na všechny vektory z  $W$ , říkáme **ortogonální projekce vektoru  $\vec{x}$  na podprostor  $W$** .

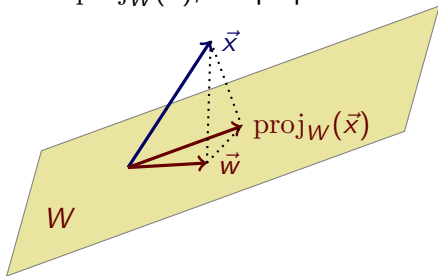


Vektoru  $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$  říkáme **ortogonální rejekce vektoru  $\vec{x}$  podprostorem  $W$**  a značíme jej  $\text{rej}_W(\vec{x})$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Slovník: **projekce**=promítnutí, **rejekce**=odmítnutí.

## Ortogonalní rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor  $\vec{x}$ , který neleží ve  $W$ , a pro jakýkoli vektor  $\vec{w}$ , který ve  $W$  leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami  $\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$  a  $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ , a s přeponou  $\vec{x} - \vec{w}$ .



Díky Pythagorově větě tedy **pro všechny vektory**  $\vec{w}$  z  $W$  platí<sup>a</sup>

$$\|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2$$

<sup>a</sup>Na této nerovnosti je založena **metoda nejmenších čtverců**, viz cvičení a druhá část této přednášky.

## Projekce na podprostor, u kterého neznáme ortogonální bázi

- 1 V obecném případě je vždy možno nejprve obecnou bázi ortogonalisovat (Gram-Schmidt) a poté použít vzorec pro projekci na podprostor s ortogonální bází.
- 2 V případě  $\mathbb{R}^n$  lze využít znalosti metrického tensoru, viz níže.

### Tvrzení

Ať  $W$  je podprostor prostoru  $\mathbb{R}^n$  se skalárním součinem zadaným metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ . Ať vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  tvoří jakoukoli bázi podprostoru  $W$ . Označme jako  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  příslušnou matici. Potom<sup>a</sup>

$$\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

<sup>a</sup>Tento divoký vzorec má krotkou podobu **pro standardní skalární součin**: platí  $\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$ , protože  $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ .

### Důkaz.

Přednáška.

## Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru  $\mathbb{R}^3$  se **standardním**<sup>a</sup> skalárním součinem nalezněte

matici projekce na rovinu  $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ . Víme: pro

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , je  $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$  matice ortogonální projekce na  $W$ .

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru  $\begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  na  $W$  spočítáme součinem

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-14) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>a</sup>Metrický tensor tedy je  $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$ .

## Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru  $\mathbb{R}^2$  se skalárním součinem s metrickým tensorem<sup>a</sup>

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ spočtěte matici projekce na přímku } W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Víme: pro  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , je  $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$  matice ortogonální projekce.

Tudíž je

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru  $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  na  $W$  spočítáme součinem

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{26}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>a</sup>Jde o **nestandardní** skalární součin: to znamená, že jde o ortogonální projekci vzhledem ke skalárnímu součinu  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ .

## Věta (charakterisace matic ortogonálních projekcí)

Ať  $\mathbb{R}^n$  je vybaven skalárním součinem  $\langle - | - \rangle$  s metrickým tensorem  $\mathbf{G}$ . Pro matici  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je ekvivalentní:

- 1  $\mathbf{P}$  je matice ortogonální projekce na podprostor  $\text{im}(\mathbf{P})$  dimense  $k$ .
- 2  $\text{rank}(\mathbf{P}) = k$  a platí  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a  $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$ .

### Důkaz.

Přednáška. ■

### Poznámka

Pro **standardní** skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  (tj. pro  $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ ) lze druhou podmínku přeformulovat takto:

- 2  $\text{rank}(\mathbf{P}) = k$  a platí  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ .



## Úvaha o bodech na přímce

At'  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň dvouprvková množina reálných čísel.

Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  leží na přímce tvaru  $y = ax + b$  právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  má řešení  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

**Důležité pozorování:** protože  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň dvouprvková množina reálných čísel, má matice výše uvedené soustavy **hodnost 2**.

## Úvaha o bodech na přímce (pokrač.)

At'  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň dvouprvková množina reálných čísel.  
Co dělat, když body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  na přímce tvaru  $y = ax + b$  **neleží?**

Lze nalézt přímku tvaru  $y = ax + b$ , která je (pro zadané body)  
**nejlepší možnou volbou?**<sup>a</sup>

**Důležité pozorování:** soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

řešení mít nemůže, **hodnost matice soustavy je ale stále 2.**

---

<sup>a</sup>Zatím nevíme, co myslíme slovem nejlepší. Pravděpodobně chceme minimalisovat chybu, které se dopustíme.

## Příklad

Tři body  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$  v  $\mathbb{R}^2$  na přímce neleží.<sup>a</sup>

Označme soustavu  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array} \right)$  jako  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

Víme:

- 1  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nemá řešení, tj. vektor  $\mathbf{b}$  neleží v prostoru  $W = \text{im}(\mathbf{A})$ .
- 2 Sloupce matice  $\mathbf{A}$  tvoří bázi prostoru  $W$ .
- 3 Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má právě jedno řešení, protože  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  je pozitivně definitní (tudíž regulární).  
Označme toto řešení  $\hat{\mathbf{x}}$ . Platí tedy  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ .
- 4 Matice  $\mathbf{P}_W$  ortogonální projekce na  $W$  je tvaru  $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ . Tudíž  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$ .
- 5 Takže:  $\|\text{rej}_W(\mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$  pro vš  $\mathbf{x}$ .  
To je ono: **minimalisovali jsme čtverec chyby**  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|$ .

<sup>a</sup>Body na první pohled „téměř“ leží na přímce  $y = 2x$ .

**Příklad (pokrač.)**

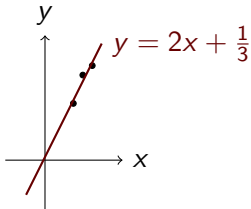
Vyřešíme tedy soustavu  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array} \right)$  metodou

nejmenších čtverců.<sup>a</sup>

- ① Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má tvar  $\left( \begin{array}{cc|c} 50 & 12 & 104 \\ 12 & 3 & 25 \end{array} \right)$  a má

jediné řešení  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ .

- ② Hledaná přímka má tvar  $y = 2x + \frac{1}{3}$ .



<sup>a</sup>Řešením získáme „nejlepší možnou“ přímku, kterou lze proložit zadanými body. Říká se jí **regresní přímka**.

## Příklad (pokrač.)

Vektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  **není řešením** soustavy  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array} \right)$ .

$$\text{Platí } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}.$$

Čtverec chyby, které jsme se dopustili, je

$$\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2/3$$

a jde o **nejmenší čtverec chyby**.

## Řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

Ať  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  je soustava nad  $\mathbb{R}$ , kde matice  $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce. Řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců probíhá následovně:

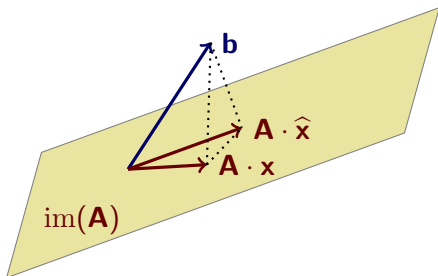
- 1 Protože  $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce, je matice  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  pozitivně definitní, tedy regulární.
- 2 Soustava  $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$  má tedy jediné řešení, označme toto řešení  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ .

Tomuto jedinému řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  se říká **řešení soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců**.

Má to následující důvod:

- 1 Platí rovnost  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ . To znamená, že  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  je **ortogonální projekce** vektoru  $\mathbf{b}$  na  $\text{im}(\mathbf{A})$ .
- 2 Protože **ortogonální rejkce**  $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$  vektoru  $\mathbf{b}$  podprostorem  $\text{im}(\mathbf{A})$  je „nejkratší“ rejkcí vektoru  $\mathbf{b}$  podprostorem  $\text{im}(\mathbf{A})$ , platí  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$ , pro každé  $\mathbf{x}$ .

## Ilustrace řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců



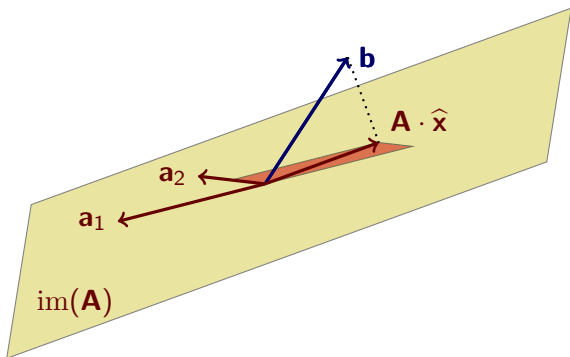
Pokud má matice soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  lineárně nezávislé sloupce, potom platí:

- 1 Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má **právě jedno** řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  metodou nejmenších čtverců.
- 2 Pro každé  $\mathbf{x}$  platí nerovnost  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$ .

## Další pohled na řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců

Pro matici  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  s lineárně nezávislými sloupci tvoří seznam  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  uspořádanou bázi podprostoru  $W = \text{im}(\mathbf{A})$ .

Řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  metodou nejmenších čtverců je **vektor souřadnic** vektoru  $\mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$  vzhledem k uspořádané bázi  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ .





## Příklad (řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců)

Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$  nemá řešení (Frobeniova věta).

V našem případě:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  
 $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Soustava  $\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$  má jediné řešení  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ .

Protože  $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  **není řešením soustavy**  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

Ovšem jakýkoli jiný vektor  $\mathbf{x}$  by „dopadl ještě hůře“. Pro všechny vektory  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{R}^2$  totiž platí nerovnost

$$0.5 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

## Příklad (proložení paraboly)

At'  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň tříprvková množina reálných čísel.

Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  leží na parabole tvaru  $y = ax^2 + bx + c$  právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

má řešení  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

## Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

**Důležité pozorování:** protože  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň **tříprvková** množina reálných čísel, má matice soustavy

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

**hodnost 3.**

Opravdu: at'  $x_i, x_j, x_k$  jsou tři **navzájem různé** hodnoty z množiny  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Potom

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_j^2 & x_j & 1 \\ x_k^2 & x_k & 1 \end{vmatrix} = (x_i - x_k) \cdot (x_i - x_j) \cdot (x_j - x_k) \neq 0$$

## Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

At'  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je alespoň tříprvková množina reálných čísel.

Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v  $\mathbb{R}^2$  lze proložit parabolou  $y = ax^2 + bx + c$ , kde  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  je řešením

soustavy rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců.

## Závěrečná poznámka

Řešení soustav metodou nejmenších čtverců má řadu aplikací. Je základem **regresních metod** v matematické statistice, viz například knihu

- Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, 3.ed, John Wiley & Sons, New York, 2003.

## Historická poznámka

Autorem metody nejmenších čtverců je německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855). V roce 1801 Gauss tuto metodu použil pro predikci dráhy planety **Ceres**, která 40 dní po objevení zmizela evropským astronomům za Sluncem. Gauss předpověděl polohu, kde se planeta za 10 měsíců opět objeví.