Vektorový součin

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.1 a B.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem.

1. Naučíme se spočítat objem k-rovnoběžnostěnu pro $k \leq n$.[a]
2. V $\mathbb{R}^n$, pro $n \geq 2$, zavedeme vektorový součin libovolného seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$. Dokážeme některé vlastnosti vektorového součinu. Tím si připravíme půdu pro příští přednášku.

[a] Připomeňme, že umíme spočítat (dokonce orientovaný) objem n-rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$.

Příští přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem, a tím pádem se standardním pojmem vzdálenosti.
Výsledky dnešní (a minulé) přednášky využijeme ke stanovení vzdálenosti dvou afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

Problém

V $\mathbb{R}^n$ je zadán seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$. Jak nalézt neorientovaný objem

$$V_k(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$$

rovnoběžnostěnu, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$?

Řešení

Označme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

1. Jestliže $k = n$, potom

$$V_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \text{absolutní hodnota} \det(\mathbf{A})$$

2. Jestliže $k < n$, potom $\det(\mathbf{A})$ není definován, protože matice $\mathbf{A}$ není čtvercová!
Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ale čtvercová je (má rozměry $k \times k$). Uvidíme, že platí

$$V_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sqrt{\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

Definice (Gramova matice a Gramův determinant)

Ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$.

1. Matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ budeme říkat Gramova matice seznamu vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.
2. Determinantu $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ budeme říkat Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ a značit jej $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Pozorování

V j-tém sloupci a i-tém řádku matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je hodnota standardního skalárního součinu $\langle \mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$.

Tento jednoduchý fakt umožní dát Gramově determinantu $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ jasný geometrický význam.

Tvrzení (význam Gramova determinantu)

Ať $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ je seznam vektorů v $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Potom platí:

1. $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \geq 0$.
2. $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) > 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé.
3. Hodnota[a] $\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}$ udává k-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

---

[a] Slogan: Gramova matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je „druhá mocnina“ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Proto je $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ „druhá mocnina“ „determinantu“ $\mathbf{A}$. Absolutní hodnota „determinantu“ $\mathbf{A}$ je tudíž $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}$. Jde ale pouze o slogan, který slouží k zapamatování; matice $\mathbf{A}$ obecně není čtvercová, proto o determinantu matice $\mathbf{A}$ obecně nemůžeme mluvit!

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz není těžký, ale je zdlouhavý, viz Tvrzení B.1.3 skript. ■

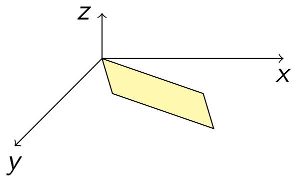
Příklad

Určete 2-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$, určeného vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 16$$

Hledaný 2-dimensionální objem je $\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = 4$.



Příklad

Určete 3-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^4$, určeného vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 72$$

Hledaný 3-dimensionální objem je

$$\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \sqrt{72} \approx 8.485$$

Připomenutí známých faktů a definice vektorového součinu

1. Pro každé lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje jediný vektor $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$
Jednoduché: $\mathbf{f}$ „je“ matice s 1 řádkem a n sloupci, označme ji $\mathbf{a}^T$, pro $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$.

2. Pro libovolný seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ vektorů z $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, je zobrazení
$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, -) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$$
lineární.

3. To znamená, že pro zadaný seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ existuje jednoznačně určený vektor $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$ tak, že platí
$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$
pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.
Místo $\mathbf{a}$ budeme psát $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ a budeme mu říkat vektorový součin seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$.

Přepis definice vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.

Základní vlastnost vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

Pro jakékoli $j = 1, \ldots, n-1$ platí

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = 0$$

tj. vektor $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ je kolmý na všechny vektory $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.

To je snadné:

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = \underbrace{\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j)}_{\text{determinant se dvěma shodnými sloupci}} = 0$$

Tvrzení (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

Platí rovnost $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$.

Důkaz.

Platí $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{e}_i \rangle}_{=i\text{-tá souřadnice vektoru } \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})} \cdot \mathbf{e}_i$,

protože $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je ortonormální báze pro standardní skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^n$. Ale

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{e}_i \rangle}_{=\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i)} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$$

podle definice vektorového součinu. ∎

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^2$

$$\times(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-x_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=x_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

a to je známý výpočet vektoru, kolmého na vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Například $\times\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ (je zvykem psát $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ místo $\times(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$)

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22} \\ x_{31}x_{12} - x_{11}x_{32} \\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{pmatrix}$$

a to je nezapamatovatelné.

Mnemotechnická pomůcka (nejde o definici vektorového součinu)

$$\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \ldots & x_{n-2,n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

Jde o ryze formální[a] zápis, ale užitečný. Například

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & \mathbf{e}_1 \\ x_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

a tak dále. A takové vzorce se již zapamatovat dají.

[a] Napravo od rovnítka totiž mezi značkami pro determinant není zapsána matice. Počítejte ale, jako by to determinant byl. Viz následující příklady.

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & 4 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_3 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot \mathbf{e}_1$$

$$-2 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 - (-1) \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_3 - 4 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 3$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^4$)

$$\times\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení (další vlastnosti vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

1. Funkce $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mapsto \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ je lineární v každé položce.
2. $\times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$, pro $\pi \in S_{n-1}$.
3. $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$, pro $\pi \in S_n$.
4. $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}))$.
5. $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{o}$ platí právě tehdy, když vektory $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé.
6. $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})}$. To jest: norma $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\|$ je rovna $(n-1)$-dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_{n-1}$.

Poznámky k důkazu na přednášce. Všechny vlastnosti plynou okamžitě z vlastností determinantu a z definice vektorového součinu.