

Metrické výpočty v \mathbb{R}^n

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.3 a B.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Víme, co je **afinní podprostor** dimenze d v prostoru \mathbb{R}^n .

Připomenutí: jde o množinu $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor dimenze d v \mathbb{R}^n a \mathbf{p} je vektor v \mathbb{R}^n .

- 2 Pro dva afinní podprostory $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v \mathbb{R}^n umíme rozhodnout, zda jsou **rovnoběžné**, nebo **různoběžné**, nebo **mimoběžné**.

- 3 Víme, co je **vektorový součin**^a $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ v \mathbb{R}^n , kde $n \geq 2$.

Připomenutí: $\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ platí pro všechna \mathbf{x} z \mathbb{R}^n .

Dále víme, že platí rovnost

$$\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}.$$

^aProstor \mathbb{R}^n je vybaven **standardním** skalárním součinem $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Dnešní přednáška

Pro dva afinní podprostory π , π' prostoru \mathbb{R}^n se **standardním** skalárním součinem spočteme jejich **vzájemnou vzdálenost**.

V dalším budeme značit:

- 1 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ je **standardní** skalární součin v \mathbb{R}^n .
- 2 $\|\mathbf{x}\|$ je **norma** v \mathbb{R}^n , vytvořená standardním skalárním součinem, tj. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$.

Pro $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

To jest: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ je **standardní eukleidovská vzdálenost** vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} z prostoru \mathbb{R}^n .

Definice

Até π a π' jsou dva afinní podprostory prostoru \mathbb{R}^n . Reálnému číslu^a

$$\omega(\pi, \pi') = \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \pi, \mathbf{x}' \in \pi' \right\}$$

říkáme **vzájemná vzdálenost** π a π' .

^aZ definice vzájemné vzdálenosti ihned plyne, že $\omega(\pi, \pi') = \omega(\pi', \pi)$.

Poznámky k definici

- 1 Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ není definice příliš zajímavá.
 - 1 $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$, proto pro jakákoli π a π' platí $\omega(\pi, \pi') = 0$.
 - 2 Prostor \mathbb{R}^1 má jako afinní podprostory buď body nebo celé \mathbb{R}^1 .
 To znamená $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|$, nebo $\omega(\mathbf{p}, \mathbb{R}) = \omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 0$.
- 2 V obecném \mathbb{R}^n víme: $\left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \pi, \mathbf{x}' \in \pi' \right\}$ je **neprázdná** a **zdola omezená** množina reálných čísel. Tudíž její **infimum existuje** a reálné číslo $\omega(\pi, \pi')$ je korektně definováno.

Problém: jak spočítat hodnotu $\omega(\pi, \pi')$ v obecném \mathbb{R}^n ?

Věta (výpočet vzáj. vzdálenosti dvou afinních podprostorů)

At' $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru \mathbb{R}^n . Potom platí:^a

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

^aProtože $\omega(\pi, \pi') = \omega(\pi', \pi)$, je také $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$.

Hlavní myšlenky důkazu (u zkoušky budou požadovány pouze tyto myšlenky)

- 1 Vzdálenost π a π' by měla být **délka kolmé příčky** prostorů π a π' .
 Tak je tomu v \mathbb{R}^2 při výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžek.
Obecný případ by měl dopadnout analogicky.
- 2 Obecně: kolmá příčka k π, π' by měla mít **směr V** , kde $V = \{\mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{w} \text{ z } W \vee W'\}$ je množina všech vektorů, které jsou **kolmé** na podprostor $W \vee W'$.

Je to ale v pořádku? Je V **lineární podprostor** prostoru \mathbb{R}^n ?

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

- ③ Vše je v pořádku:

$$\begin{aligned} V &= \{ \mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{w} \in W \vee W' \} \\ &= \bigcap_{\mathbf{w} \in W \vee W'} \{ \mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle = 0 \} \\ &= \bigcap_{\mathbf{w} \in W \vee W'} \ker(\langle \mathbf{w} \mid - \rangle) \end{aligned}$$

Proto je V **lineární podprostor** prostoru \mathbb{R}^n .

- ④ Najdeme^a body \mathbf{x}_0 v π a \mathbf{x}'_0 v π' tak, že platí rovnost^b
 $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 = \text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

To znamená, že $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 \in V$, proto $\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}'_0 + V$ je
hledaná kolmá přímka π , π' , procházející body \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}'_0 .

^aTo je mírně technické (nikoli těžké): viz důkaz Věty B.3.3 **skript**.

^bPodle definice V platí také $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 = \text{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Toho v dalších výpočtech několikrát využijeme.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

- 5 Pro jakékoli \mathbf{x} v π a jakékoli \mathbf{x}' v π' platí

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

Proto podle **Pythagorovy věty^a** platí

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$$

a tedy $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2$, neboli

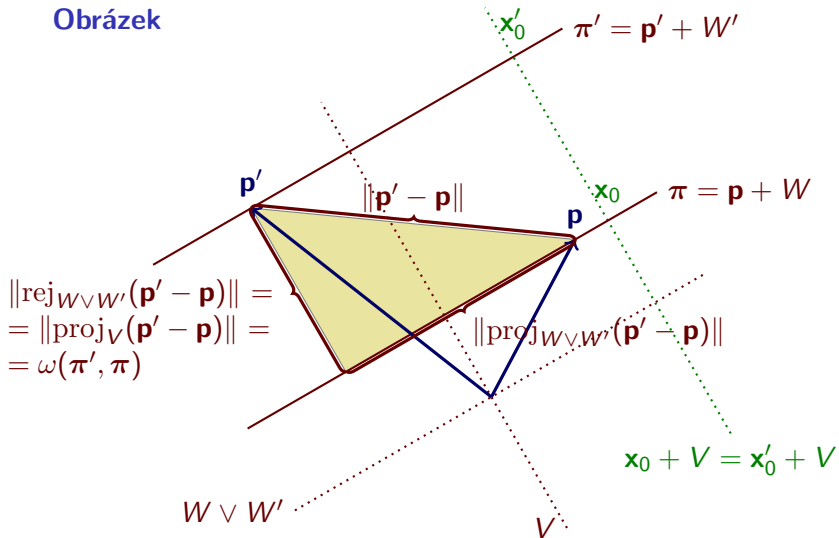
$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

To znamená, že platí^b $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. ■

^aZ definice V platí $\langle \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rangle = 0$.

^bPodle definice V platí také $\omega(\pi, \pi') = \|\text{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$.

Obrázek



Poznámky

- 1 Vzorec $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ platí v \mathbb{R}^n s **libovolným** skalárním součinem $\langle - | - \rangle$, který vytváří normu $\| - \|$.

Důkaz hlavní věty totiž **nikde** nevyužívá, že skalární součin $\langle - | - \rangle$ je standardní.

Jediné, co důkaz vyžaduje, je pojem **ortogonální rejekce** a platnost **Pythagorovy věty**.^a

- 2 V dalším se omezíme na **standardní** skalární součin v prostorech \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 .

Tam jsou příslušné vzorce pro vzájemnou vzdálenost dvou afinních podprostorů poměrně snadno pochopitelné.

^aPřipomenutí: **ortogonální projekce** umíme počítat pro **libovolný** skalární součin v \mathbb{R}^n , vzorce jsou však poněkud barokní. Takže, pro **libovolný** skalární součin v \mathbb{R}^n , umíme počítat (barokním způsobem) i **ortogonální rejekce**. **Pythagorova věta** platí pro **libovolný** skalární součin v \mathbb{R}^n .

Důležité upozornění

Ve zbytku přednášky odvodíme celou řadu vzorců pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů v \mathbb{R}^2 a v \mathbb{R}^3 se standardními skalárními součiny. Tyto vzorce **nebudou** zkoušeny stylem: *Napište vzorec pro vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{R}^3 , atd.*

Bude vyžadováno:

- 1 **Znát obecný vzorec** $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v prostoru \mathbb{R}^n a **znát hlavní myšlenky jeho odvození** z předchozích stran.

- 2 Z přednášky o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích **znát vzorec**

$$\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}$$

pro **nenulový** vektor \mathbf{v} z \mathbb{R}^n . Viz následující stranu.

- 3 **Tvůrčí uplatnění** výše uvedeného vzorce pro ortogonální projekci k nalezení vzájemných vzdáleností v \mathbb{R}^2 a v \mathbb{R}^3 .

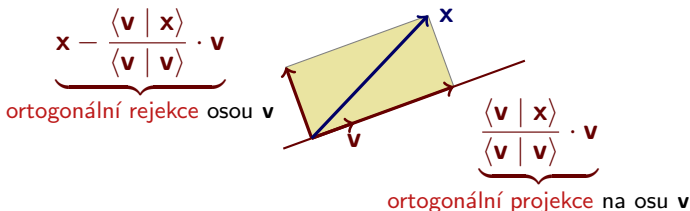
Připomenutí (přednáška o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích)

V \mathbb{R}^n pro nenulový vektor \mathbf{v} platí

$$\|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \right| \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$$

a tudíž

$$\|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x} - \text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\|$$



Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{R}^2

1 Vzdálenost \mathbf{p}' od $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$. V tomto případě je^a

1 $W \vee W' = \text{span}(\mathbf{s})$.

2
$$\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \left\| (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s} \right\|$$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\pi = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \text{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{s}}\right)$ je tedy $\omega(\mathbf{p}', \pi)$ rovno

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \dots = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

^aTento vzorec není příliš „hezký“. Lepší postup: definujte $\mathbf{n} = \times(\mathbf{s})$ a pracujte s přímkou π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. Viz další příklad.

Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{R}^2 (pokrač.)

② Vzdálenost \mathbf{p}' od π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. V tomto případě je

① $V = \text{span}(\mathbf{n})$.

② Neznáme směr \mathbf{s} zadané přímky, ale platí $\omega(\mathbf{p}', \pi) =$

$$\begin{aligned} \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| &= \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\langle \mathbf{n} | \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T \mathbf{p}' - \mathbf{n}^T \mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|} \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a přímku π zadanou rovnicí^a $\underbrace{-6x + 3y}_{=\mathbf{n}^T \mathbf{x}} = \underbrace{-18}_{=\mathbf{n}^T \mathbf{p}}$

je tedy $\omega(\mathbf{p}', \pi)$ rovno

$$\frac{|-6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 18|}{\sqrt{45}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

^aJde o **stejnou** přímku, jako v minulém příkladu.

Vzdálenost dvou přímek v \mathbb{R}^2

Jsou zadány přímky $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$ a $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$.

- $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') =$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \text{span}(\mathbf{s}), \text{ jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně závislé,} \\ \text{tj. jsou-li } \pi \text{ a } \pi' \text{ rovnoběžné} \\ \\ = \mathbb{R}^2, \text{ jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně nezávislé,} \\ \text{tj. jsou-li } \pi \text{ a } \pi' \text{ různoběžné} \end{array} \right.$$
- Pokud $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') = \text{span}(\mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \omega(\mathbf{p}', \pi)$$

Vzdálenost bodu od přímky již umíme počítat.

- Pokud $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') = \mathbb{R}^2$, je

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

Vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{R}^3

Je dán bod \mathbf{p}' a přímka $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$. Potom

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{p}', \pi) &= \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| \\ &= \left\| (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s} \right\|\end{aligned}$$

což je **formálně stejný** vzorec jako v \mathbb{R}^2 .

Je-li přímka π zadána rovnicově jako $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$, kde $\text{rank}(\mathbf{N}) = 2$, pak $V = \text{im}(\mathbf{N})$. Proto

$$\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{N})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{N}(\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

Leckdy je **lepší postup** je vyřešit soustavu $\mathbf{N}^T\mathbf{x} = \mathbf{N}^T\mathbf{p}$, získat tak π v parametrickém tvaru a použít výše uvedený vzorec.

Vzdálenost bodu od roviny v \mathbb{R}^3

Pro vzdálenost bodu \mathbf{p}' od roviny π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ platí

$$\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T \mathbf{p}' - \mathbf{n}^T \mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

kde jsme využili toho, že \mathbf{n} je **normála** roviny π .

Získáváme tak **formálně stejný** vzorec jako pro vzdálenost bodu od přímky v \mathbb{R}^2 .

Je-li rovina π zadána jako $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je **vhodné** spočítat^a $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ a **použít předchozí postup** pro rovinu π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$.

^aPřipomenutí mnemotechniky: $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \mathbf{e}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \mathbf{e}_2 \\ s_{31} & s_{31} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$.

Vzdálenost přímky od roviny v \mathbb{R}^3

Ať $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$ je přímka a $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ je rovina.

Platí

$$\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{pokud } \mathbf{s}', \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \text{ jsou lineárně} \\ & \text{nezávislé,} \\ & \text{tj., pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou různoběžné,} \\ \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), & \text{pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

- 1 Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbb{R}^3$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

- 2 Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

$$= \frac{|\langle \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}\right)$ a

$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Protože $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, jsou π a π' **rovnoběžné**.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}} = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 56 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}} = \frac{142}{\sqrt{684}} \approx 5.43$$

Vzdálenost přímky od přímky v \mathbb{R}^3

At' $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$ a $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$ jsou přímky.

Platí

$$\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \text{span}(\mathbf{s}), & \text{pokud } \mathbf{s}' \text{ a } \mathbf{s}, \text{ jsou lineárně závislé} \\ & \text{tj., pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou rovnoběžné,} \\ \text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s}), & \text{pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ nejsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

- 1 Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \text{span}(\mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \omega(\mathbf{p}', \pi)$$

a vzdálenost bodu od přímky už umíme počítat.

- 2 Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s}' \times \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

$$= \frac{|\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}' \times \mathbf{s}\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a

$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Přímky π a π' zjevně **nejsou rovnoběžné**.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.183$$