Lineární prostory nad $\mathbb{R}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co je definice?

Co je hypotéza?

Co je (matematická) věta? Lemma? Tvrzení?

Co je důkaz?

Více např. v textech

1. J. Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*
2. J. Velebil, *Sbírka problémů z lineární algebry*

Neformálně

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je kolekce jakýchkoli objektů (těm budeme říkat vektory), které mezi sebou můžeme sčítat a každý z nich můžeme vynásobit skalárem (v našem případě prvkem $\mathbb{R}$). Sčítání vektorů a násobení skalárem se musí řídit jistými zákonitostmi.

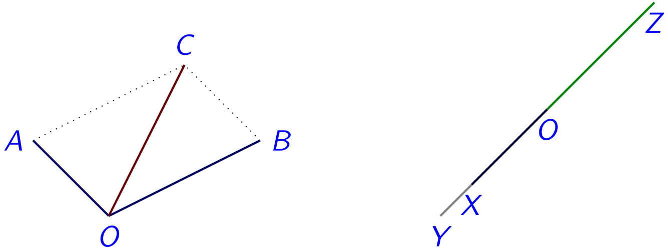
Příklady

1. Vektory v rovině (fyzikální, případně geometrická intuice).
2. Reálné polynomy (značení: $\mathbb{R}[x]$).
3. n-tice reálných čísel (značení: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$).[a]
4. Komplexní čísla (značení: $\mathbb{C}$).
5. Řada dalších příkladů...

[a] Důležité: Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme psát jako n-tice do sloupců.

Příklad (orientované úsečky v rovině)

Dvě operace:



sčítání: $OC = OA + OB$
násobení skalárem: $OY = \sqrt{2} \cdot OX$, $OZ = -\sqrt{2} \cdot OX$

Sčítání orientovaných úseček a násobení orientované úsečky reálným skalárem splňují jisté axiomy.

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$)

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{R} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
    1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
    2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
    3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
    4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

1. Nulový vektor je jednoznačně určen.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
3. Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

1. Ať existují $\vec{o_1}, \vec{o_2}$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o_2} = \vec{o_2} + \vec{x} = \vec{x}$. Pak $\vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{o_2} = \vec{o_2}$.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

3. Platí: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 - 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
4. Platí: $a \cdot \vec{o} = a \cdot (0 \cdot \vec{o}) = (a \cdot 0) \cdot \vec{o} = 0 \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

■

Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.
Ať $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1}. Tudíž
$\vec{o} = a^{-1} \cdot \vec{o} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. ■

Povšimněme si, čeho využívá předchozí tvrzení:

Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: a^{-1} existuje, jakmile $a \neq 0$.

Další příklady a protipříklady

1. $L = (0, +\infty)$. Operace sčítání vektorů: $x \oplus y := x \cdot y$. Násobení skalárem: $\alpha \odot x := x^{\alpha}$. Pak L je lineární prostor.
2. L je jakákoli jednoprvková množina. Pak L (spolu s evidentními operacemi) je lineární prostor. Říkáme mu triviální lineární prostor. Nutně: $L = \{\vec{o}\}$.
3. $L = \mathbb{R}^2$. Operace: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$, $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$. Nejde o lineární prostor.

Role reálných skalárů

Lze $\mathbb{R}$ nahradit jiným „číselným oborem“?

Se skaláry je třeba umět následující: rozumné sčítání, násobení.

Abstraktní pojem: skaláry musí tvořit strukturu $\mathbb{F}$, které se říká těleso.

To vede k pojmu lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Více v příští přednášce.

Poznámka

Abstrakce v lineární algebře má tedy dva stupně:

1. Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ abstrahuje (například) prostor orientovaných úseček.
2. Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ abstrahuje dále: roli skalárů převezmou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

1. Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
   Díky asociativitě sčítání nemusíme psát závorky.
2. Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
   Díky axiomům jde opět o násobek $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
3. Obecněji, můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů.
   To znamená: je-li dán konečný seznam vektorů $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a konečný seznam skalárů[a] $(a_1, \ldots, a_n)$, lze utvořit lineární kombinaci

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

[a] Těmto skalárům říkáme koeficienty lineární kombinace.

Definice

Seznam (také: skupina) vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

1. () definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) lineární kombinaci (s prázdným seznamem koeficientů).
2. $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$).

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ vytvářejí „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$.
Tento „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$ prochází počátkem a má směr $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Příští přednášky: těmto „rovným kusům“ v $\mathbb{R}^n$ budeme říkat lineární podprostory $\mathbb{R}^n$.

Pochopitelně, v příštích přednáškách budeme pracovat daleko abstraktněji než v $\mathbb{R}^n$.

Slogan je reklamní heslo!

Na přednášce budeme zmiňovat řadu sloganů. Slogany mají sloužit k intuitivnímu pochopení. Slogany v žádném případě nemohou nahradit přesná znění definic, vět, atd.

Lineární prostory nad $\mathbb{F}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ jako zobecnění (například) prostoru orientovaných úseček v rovině.

Dnešní přednáška

1. Těleso $\mathbb{F}$ jako zobecnění reálných čísel.
2. Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ jako zobecnění pojmu lineární prostor nad $\mathbb{R}$.
3. Důležité: povšmneme si, že důkazy typicky nesouvisí s konkrétními operacemi; souvisí s pouze s algebraickými vlastnostmi těchto operací.[a]

Od příště budeme pracovat s lineárními prostory nad obecným tělesem.

[a] Do jisté míry je tak dnešní přednáška „kopií“ přednášky předchozí. Algebra dovolí od příště takovou marnotratnost nedopustit.

Sčítání a násobení reálných čísel

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (existence nuly).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a + b = b + a$ (komutativita sčítání).
   4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{R}$ tak, že $a + b = 0$ (existence opačného čísla, značíme $b = -a$).

Sčítání a násobení reálných čísel (pokrač.)

2. Vlastnosti násobení:
   1. Existuje $1 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).
3. Provázanost sčítání a násobení:
   1. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).
4. Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1}.

Poznámka

Výše uvedené vlastnosti byly podstatné pro zavedení pojmu lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (viz minulou přednášku).

Příklady: další „standardní“ sčítání a násobení

1. Standardní sčítání a násobení racionálních čísel: obě operace na množině $\mathbb{Q}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
2. Standardní sčítání a násobení komplexních čísel: obě operace na množině $\mathbb{C}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
3. Standardní sčítání a násobení celých čísel: obě operace na množině $\mathbb{Z}$ nesplňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$. Neplatí test invertibility: například $2 \neq 0$, ale 2^{-1} v $\mathbb{Z}$ neexistuje![a]

[a] Test invertibility v $\mathbb{R}$ byl v minulé přednášce podstatný! Množinu $\mathbb{Z}$ tedy jako množinu skalárů nebudeme moci použít.

Příklad: „nestandardní“ sčítání a násobení

1. Množina $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ s operacemi:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

2. Množina $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ s operacemi:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Operace na množinách $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.

Slogan pro těleso

Těleso $\mathbb{F}$ je kolekce jakýchkoli objektů (těm budeme říkat prvky tělesa $\mathbb{F}$), které mezi sebou můžeme sčítat a násobit. Sčítání a násobení v $\mathbb{F}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení v $\mathbb{R}$.

Definice (těleso)

Těleso je množina $\mathbb{F}$, vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $0 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (existence nuly).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a + b = b + a$ (komutativita sčítání).
   4. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{F}$ tak, že $a + b = 0$ (existence opačného čísla, značíme $b = -a$).

Definice tělesa (pokrač.)

2. Vlastnosti násobení:
   1. Existuje $1 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).
3. Provázanost sčítání a násobení:
   1. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).
4. Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1}.

Příklady

1. Množiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se standardním sčítáním a násobením jsou tělesa.
2. Množina $\mathbb{Z}$ se standardním sčítáním a násobením není těleso.
3. Množiny $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ jsou tělesa (sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení 2, resp. 3).

   Obecněji: množina $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, kde p je prvočíslo, je těleso, pokud čísla sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení p.

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$)

Lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{F} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
    1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
    2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
    3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
    4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Definice je formálně stejná jako pro lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Jediná změna: těleso $\mathbb{R}$ je nahrazeno obecným tělesem $\mathbb{F}$.

Příklady lineárních prostorů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$

1. Prostory $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Vektory jsou uspořádané n-tice prvků $\mathbb{F}$, psané do sloupce. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

   Například: v $(\mathbb{Z}_7)^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, v $\mathbb{Q}^3$ je vektor $\begin{pmatrix} 2.14 \\ -21.7 \\ 12 \end{pmatrix}$,

   v $\mathbb{C}^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2-4i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$, atd.

2. Prostory $\mathbb{F}[x]$ polynomů v neurčité x s koeficienty z tělesa $\mathbb{F}$. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$, vektory jsou jednotlivé polynomy. Sčítání a násobení je definováno analogicky jako v $\mathbb{R}[x]$. Například: v $\mathbb{Z}_3[x]$ platí:

$$
\begin{aligned}
(2x+2)+(x+2) &= 1 \\
(2x+2)\cdot(x+2) &= 2x^2+1
\end{aligned}
$$

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

1. Nulový vektor je jednoznačně určen.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
3. Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

1. Ať existují $\vec{o_1}, \vec{o_2}$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o_2} = \vec{o_2} + \vec{x} = \vec{x}$. Pak $\vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{o_2} = \vec{o_2}$.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

3. Platí: $\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = (1-1)\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x} = \vec{o}$.
4. Platí: $a\cdot\vec{o} = a\cdot(0\cdot\vec{o}) = (a\cdot 0)\cdot\vec{o} = 0\cdot\vec{o} = \vec{o}$.

■

Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a\in\mathbb{F}$, $\vec{x}\in L$. Pak $a\cdot\vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.
Ať $a\cdot\vec{x} = \vec{o}$ a $a\neq 0$. Potom existuje a^{-1}. Tudíž
$\vec{o} = a^{-1}\cdot\vec{o} = a^{-1}\cdot(a\cdot\vec{x}) = (a^{-1}\cdot a)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} = \vec{x}$. ■

Povšimněme si:

Důkazy jsou stejné, jako v minulé přednášce!

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

1. Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
   Díky asociativitě sčítání nemusíme psát závorky.
2. Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
   Díky axiomům jde opět o násobek $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
3. Obecněji, můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů.
   To znamená: je-li dán konečný seznam vektorů $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a konečný seznam skalárů[a] $(a_1, \ldots, a_n)$, lze utvořit lineární kombinaci

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

[a] Těmto skalárům říkáme koeficienty lineární kombinace.

Definice

Seznam (také: skupina) vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

1. () definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) lineární kombinaci (s prázdným seznamem koeficientů).
2. $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1)$ v $\mathbb{R}^2$

a seznam (2.5) reálných čísel je

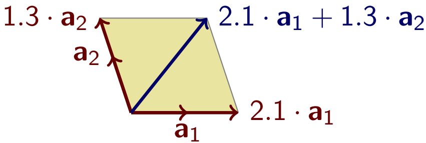
lineární kombinace.

Všechny možné lineární kombinace vektoru $\mathbf{a}_1$ vytvářejí v $\mathbb{R}^2$ přímku procházející počátkem (se směrem $\mathbf{a}_1$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ v $\mathbb{R}^3$

a seznam $(2.1, 1.3)$ reálných čísel je



Všechny možné lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ vytvářejí v $\mathbb{R}^3$ rovinu procházející počátkem (se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$).

Význam lineárních kombinací (zatím jen slogan)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.
Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ v L vytvářejí „rovný kus“ prostoru L.
Tento „rovný kus“ prostoru L prochází počátkem $\vec{o}$ a má „směr“ $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Příští přednáška: těmto „rovným kusům“ v L budeme říkat lineární podprostory L.

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic)

Existují koeficienty x, y v $\mathbb{Z}_7$ tak, že v $(\mathbb{Z}_7)^2$ platí rovnost

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ?$$

Dva pohledy na tento problém:

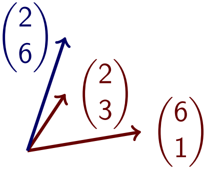
1. Hledáme prvky x, y v $\mathbb{Z}_7$ tak, že platí

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 2 \\ 3x + 1y &= 6 \end{aligned}$$

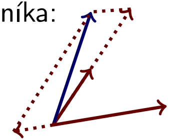
To znamená: koeficienty lineární kombinace jsou řešením jisté soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_7$.

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic, pokrač.)

2. Pro zadané vektory



hledáme „natažení" červených vektorů tak, aby modrý vektor byl úhlopříčkou čtyřúhelníka:



Pozor: výše uvedený obrázek je „slogan"! Pracujeme totiž v $(\mathbb{Z}_7)^2$.

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Hledáme-li pro pevný seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a pevný vektor $\mathbf{b}$ v $\mathbb{F}^r$ reálné koeficienty $x_1, \ldots, x_s$ tak, aby platila rovnost

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \ldots + x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{b}$$

pak lze na tuto úlohu pohlížet dvěma způsoby:

1. Řešíme soustavu r lineárních rovnic o s neznámých.
2. Hledáme „natažení“ vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ pomocí skalárů $x_1, \ldots, x_s$ tak, aby vektor $\mathbf{b}$ tvořil úhlopříčku rovnoběžnostěnu.

Příští přednášky: druhý pohled na tuto úlohu nám dovolí vybudovat elegantní metodu řešení (Gaussovu eliminaci).

Lineární obal a lineární podprostor

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.5 a 1.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Definice lineárního prostoru (nad obecným tělesem).
2. Lineární kombinace.

Dnešní přednáška

1. Lineární obal množiny vektorů.
2. Lineární podprostor lineárního prostoru.

Připomenutí

V lineárním prostoru můžeme zjednodušovat zápisy:

1. Píšeme: $-\vec{x}$ místo $(-1) \cdot \vec{x}$. Jde o opačný vektor k vektoru $\vec{x}$ (dokázáno minule).
2. Píšeme: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n$ místo $(\ldots(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \cdots + \vec{x}_{n-1}) + \vec{x}_n$. Důvod: asociativita sčítání vektorů.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ s koeficienty a_1, ..., a_n z tělesa $\mathbb{F}$ je vektor $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$.

Lineární kombinace prázdného seznamu () je nulový vektor.

Konečné a nekonečné množiny

Připomenutí:[a] množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

1. Množina M je konečná, když má přesně n prvků, kde n je nějaké přirozené číslo.

   To znamená: M je konečná, když buď

   $M = \emptyset$ (množina M má 0 prvků),

   nebo

   $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo (v tom případě má množina M n prvků).

2. Množina M je nekonečná, když není konečná.

   Například $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ jsou nekonečné množiny. Množina $\mathbb{R}[x]$ je nekonečná.

[a] Důležité: v této přednášce nula je přirozené číslo.

Definice (lineární obal množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru L. Lineární obal množiny vektorů M je množina $\mathrm{span}(M)$, definovaná takto:

$$\vec{x} \in \mathrm{span}(M) \quad \text{právě tehdy, když}^{a} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké $n \geq 0$, nějaká $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ a nějaká $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in M$.

[a] Pozor: prázdná lineární kombinace je rovna vektoru $\vec{o}$.

Ujasnění si definice $\mathrm{span}(M)$

$\vec{x} \in \mathrm{span}(M)$ právě tehdy, když existuje nějaký seznam S vektorů z množiny M tak, že $\vec{x}$ je roven nějaké lineární kombinaci seznamu S.

To jest: $\mathrm{span}(M)$ je množina všech možných lineárních kombinací, které lze z M utvořit.

Příklady (viz minulé přednášky)

1. Pro 

   v $\mathbb{R}^2$ je $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1\})$ přímka procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1)$.

2. Pro 

   v $\mathbb{R}^3$ je $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

   Pozor: pro 

   v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ není rovina! Jde opět o přímku. Jak poznat o co jde? Uvidíme příště.[a]

[a] Toto téma se zove lineární závislost a lineární nezávislost.

Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu

1. Je-li $M \subseteq N$, potom $\mathrm{span}(M) \subseteq \mathrm{span}(N)$.
2. Pro vš. M platí: $M \subseteq \mathrm{span}(M)$.
3. Pro vš. M platí: $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) \subseteq \mathrm{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Vysvětlení uzávěrových vlastností (slogan)

Lineárními kombinacemi tvoříme „rovné kusy“ lineárního prostoru (viz minulou přednášku).

Množina $\mathrm{span}(M)$ je tedy „zabalení“ množiny M tak, aby výsledkem byl „co nejmenší rovný kus“, který obsahuje M.

Definice (lineární podprostor)

Ať W je podmnožina lineárního prostoru L. Řekneme, že W je lineární podprostor lineárního prostoru L, když platí $\mathrm{span}(W) \subseteq W$.

Slogan pro lineární podprostor

Podprostor je „dobrá“ podmnožina prostoru. Žádnou lineární kombinací nelze z lineárního podprostoru „utéct“.

Tvrzení

1. $\mathrm{span}(M)$ je vždy lineární podprostor. Jde o nejmenší podprostor, který obsahuje množinu M.
2. Množina M je lineární podprostor právě tehdy, když $\mathrm{span}(M) = M$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení

Ať L je lineární prostor. Podmnožina $W \subseteq L$ je lineárním podprostorem prostoru L právě tehdy, když platí:

1. $\vec{o}$ je prvkem W (uzavřenost W na nulový vektor).
2. $\vec{x} + \vec{y}$ je prvkem W, pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in W$ (uzavřenost W na součet vektorů).
3. $a \cdot \vec{x}$ je prvkem W, pro každé $a \in \mathbb{F}$ a každé $\vec{x} \in W$ (uzavřenost W na skalární násobek).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Další slogan pro lineární podprostor

Lineární podprostor vždy obsahuje nulový vektor a „vydrží" operace součtu a skalárního násobku.

Důležité

Ať W je lineární podprostor lineárního prostoru L. Potom množina W sama o sobě je lineárním prostorem, pokud sčítání vektorů ve W a násobení vektoru skalárem ve W definujeme stejně jako v prostoru L.

Obrácené tvrzení ale neplatí: například $W = \{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^2$. Ale množina W spolu s operacemi

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří lineární prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklady

1. Každý lineární prostor je sám svým podprostorem.
2. Množina $\{\vec{o}\}$ je vždy lineárním podprostorem.[a]
3. $\mathbb{R}^3$ je lineární prostor (operace jsou definovány po složkách).
   1. $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.
   2. $W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.

      Pozor! Na množině W_2 lze definovat strukturu lineárního prostoru (cvičení).

---

[a] Tomuto podprostoru říkáme triviální podprostor.

Příklady (pokrač.)

4. Označme jako $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 3 a jako $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 136.
   Potom $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$.

   Obecněji: Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Označme jako $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ množinu všech polynomů nad $\mathbb{F}$ stupně maximálně n, $n \geq 0$.
   Jakmile $n \leq m$, je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}^{\leq m}[x]$.
5. Pro každé $n \geq 0$ je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}[x]$.

Vlastnosti lineárních podprostorů

Ať L je lineární prostor.

1. Průnik libovolného systému $\{W_i \mid i \in I\}$ podprostorů prostoru L je lineárním podprostorem prostoru L.
2. Sjednocení systému $\{W_i \mid i \in I\}$ lineárních podprostorů prostoru L obecně lineárním podprostorem prostoru L není.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (spojení lineárních podprostorů)

Ať $\{W_i \mid i \in I\}$ je systém lineárních podprostorů prostoru L. Lineárnímu podprostoru $\operatorname{span}(\bigcup_{i \in I} W_i)$ prostoru L říkáme spojení podprostorů W_i, $i \in I$, a značíme jej[a]

$$\bigvee_{i \in I} W_i$$

[a] V případě dvou podprostorů používáme i značení $W_1 \vee W_2$.

Klasifikace lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$

Všechny podprostory $\mathbb{R}^3$ jsou buď

1. Jednoprvková množina obsahující pouze počátek.

nebo

2. Každá přímka procházející počátkem.

nebo

3. Každá rovina procházející počátkem.

nebo

4. Celá množina $\mathbb{R}^3$.

Důkaz.

V každém z uvedených bodů je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$. To, že žádné jiné lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ neexistují, ukážeme později.[a] ■

[a] Budeme k tomu potřebovat pojem dimense.

Lineární závislost a nezávislost

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 3.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Lineární kombinace.
2. Definice lineárního obalu.
3. Definice lineárního podprostoru.

Dnešní přednáška

1. Lineární závislost/nezávislost seznamu a množiny vektorů v lineárním prostoru.

Připomenutí

1. Pro

v $\mathbb{R}^3$ je $\operatorname{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

2. Pro

v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\operatorname{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina není.

V množině $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je (například) vektor $\mathbf{a}_2$ „zbytečný vzhledem k tvorbě lineárních kombinací“.[a]

Platí totiž $\operatorname{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}) = \operatorname{span}(\{\mathbf{a}_1\})$.

[a] Za chvíli budeme říkat, že množina $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je lineárně závislá.

Definice

Lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ je triviální, pokud $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
V opačném případě je lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ netriviální.

Poznámky

1. Triviální lineární kombinace je vždy rovna nulovému vektoru: rovnost $0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$ platí, protože $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$ (dokázáno minule).
2. I netriviální lineární kombinace může být rovna nulovému vektoru: například $\vec{x} - \vec{x} = \vec{o}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$.
3. Lineární kombinaci, která dává nulový vektor, také říkáme nulová kombinace.[a]

[a] Pozor: triviální kombinace je vždy nulová. Nulová kombinace nemusí být triviální.

Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam S vektorů je lineárně nezávislý, pokud platí jedna z podmínek:

1. Seznam S je prázdný.
2. Seznam S je tvaru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Řekneme, že seznam S je lineárně závislý, pokud není lineárně nezávislý.

Příklady

1. Prázdný seznam () je vždy lineárně nezávislý.
2. Seznam $(\vec{o})$ je vždy lineárně závislý.
3. Seznam, ve kterém se opakuje vektor, je vždy lineárně závislý.

Příklad

Nulová lineární kombinace $x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \ldots x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{o}$ v $\mathbb{F}^r$, kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

kóduje soustavu r lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_s a_{1s} &= 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_s a_{2s} &= 0 \\ &\vdots \\ x_1 a_{r1} + x_2 a_{r2} + \cdots + x_s a_{rs} &= 0 \end{aligned}$$

o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

Seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když tato soustava má pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

Definice (lineární nezávislost množiny vektorů)

Ať M je množina vektorů v lineárním prostoru L. Řekneme, že M je lineárně nezávislá, pokud platí jedna z následujících podmínek:

1. Množina M je prázdná.
2. $M = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ je neprázdná konečná množina a navíc platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
3. M je nekonečná množina a každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Řekneme, že množina M je lineárně závislá, pokud není lineárně nezávislá.

Praktický test lineární nezávislosti neprázdné množiny M

Musí platit následující implikace:

> Ať $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, kde $n > 0$ je přirozené číslo, vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou z M a skaláry $a_1, \ldots, a_n$ jsou z $\mathbb{F}$. Potom $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Příklady

1. $\{\vec{o}\}$ je lineárně závislá množina v jakémkoli lineárním prostoru L.

   Obecněji: ať $\vec{o} \in M$, potom M je lineárně závislá množina.

2. Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^3$.

   Obecněji: definujte pro $i = 1, \ldots, n$, vektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ jako n-tici mající na i-té posici 1 a všude jinde 0. Potom $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^n$.

3. Nekonečná množina $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ je lineárně nezávislá množina v prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$.

Příklady (pokrač.)

4. Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně závislá množina v $\mathbb{R}^3$.

   Důvod:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tvrzení

Ať M je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru L. Jakmile $N \subseteq M$, je i N lineárně nezávislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Slogan

Ubereme-li z lineárně nezávislé množiny vektorů nějaké vektory, je výsledná množina opět lineárně nezávislá.

Tvrzení

Ať M je lineárně závislá množina vektorů v lineárním prostoru L. Jakmile N je množina vektorů z L a platí $M \subseteq N$, je i N lineárně závislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Slogan

Přidáme-li do lineárně závislé množiny vektorů nějaké vektory, je výsledná množina opět lineárně závislá.

Věta (charakterisace lineárně nezávislých množin)

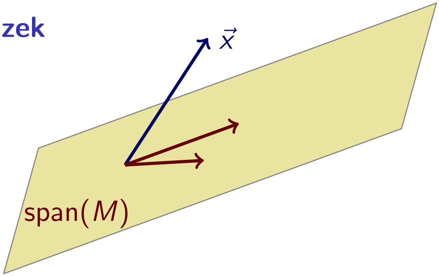
Pro množinu M vektorů z lineárního prostoru L jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Množina M je lineárně nezávislá.
2. Pro každý vektor $\vec{x} \notin \operatorname{span}(M)$ je množina $M \cup \{\vec{x}\}$ lineárně nezávislá.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Ilustrační obrázek



Věta (charakterisace lineárně závislých množin)

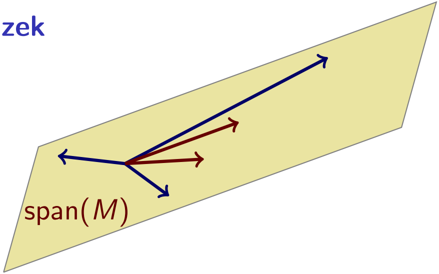
Pro množinu M vektorů z lineárního prostoru L jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Množina M je lineárně závislá.
2. Existuje $\vec{v} \in M$ tak, že $\operatorname{span}(M \setminus \{\vec{v}\}) = \operatorname{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Ilustrační obrázek



Báze a dimense

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 3.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Lineární kombinace, lineární závislost/nezávislost.
2. Lineární obal seznamu/množiny vektorů.

Dnešní přednáška

1. Báze lineárního (pod)prostoru.

   Intuitivní význam: báze je výběr systému souřadnicových os.
2. Dimense lineárního (pod)prostroru.

   Intuitivní význam: dimense je počet souřadnicových os.

Připomenutí

Množina M je konečná, pokud buď $M = \emptyset$ nebo $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$. Množina M je nekonečná, když není konečná.

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L. Řekneme, že množina G generuje W, když platí $\operatorname{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je množina generátorů podprostoru W.)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je konečně generovaný, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\operatorname{span}(G) = W$ pro nějakou konečnou množinu G.)

Příklady

1. Pro každý prostor L platí: L je množina generátorů prostoru L.

   Množina generátorů L prostoru L obecně není konečná a je vždy lineárně závislá (například: $\mathbb{R}^2$ je nekonečná lineárně závislá množina generátorů prostoru $\mathbb{R}^2$).

2. Jak $\emptyset$, tak $\{\vec{o}\}$ jsou konečné množiny generátorů triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$. Důvody: $\operatorname{span}(\emptyset) = \{\vec{o}\}$ (minulé přednášky) a $\operatorname{span}(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$.
   Všimněme si:
   1. $\emptyset$ je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.
   2. $\{\vec{o}\}$ je lineárně závislá množina generátorů prostoru $\{\vec{o}\}$.

3. Konečná množina $G = \{\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ generuje „osu prvního a třetího kvadrantu“ prostoru $\mathbb{R}^2$. Množina G je lineárně závislá.

Definice (báze)

Lineárně nezávislé množině B, která generuje prostor L, říkáme báze prostoru L. Je-li B konečná, pak seznamu prvků B říkáme uspořádaná báze.

Slogan pro bázi

Báze prostoru je „nejúspornější" množina generátorů.

Příklady

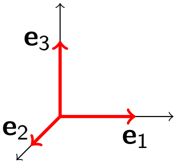
1. $\emptyset$ je báze triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$.
2. Každá z množin $\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.
3. Množina $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.

Příklad (kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$)

Ať $\mathbb{F}$ je jakékoli těleso. Označme jako $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ následující seznam vektorů v $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$:

$\mathbf{e}_i$ má jedničku na i-té posici, všude jinde nuly.

Potom K_n je uspořádaná báze prostoru $\mathbb{F}^n$.
Této uspořádané bázi K_n říkáme kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$.
(Také: standardní báze.)
Příklad: kanonická báze K_3 v $\mathbb{R}^3$.



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Fourierova báze pro $n = 4$ (varianta této báze je používána v JPEG)

Pro $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, je seznam $(\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, kde

$$\vec{f}_0 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^0 \\ w^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{C}^4$ nad tělesem $\mathbb{C}$.

Tvrzení (Existence báze pro konečně generované prostory)

Každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi.
Navíc: všechny možné báze prostoru L mají stejný počet prvků.

Myšlenka důkazu

První tvrzení: víme, že $\mathrm{span}(G) = L$, kde G je konečná. Lze postupovat dvěma způsoby:

(I) „Přidávat“ do prázdné množiny „důležité“ vektory z G.

(II) „Ubírat“ z G „zbytečné“ vektory.

Detaily: přednáška.

Druhé tvrzení: Exchange Lemma (viz skripta, Lemma 3.2.10 a cvičení).

∎

Definice (prostor konečné dimense)

Lineární prostor L má dimensi n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L, která má n prvků,[a] kde n je přirozené číslo.

[a] A tudíž, podle předchozího, všechny báze prostoru L mají n prvků.

Příklady

1. Platí: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $n \geq 0$.
2. Obecněji: pro jakékoli těleso $\mathbb{F}$ platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $n \geq 0$.
3. Platí: $\dim(\{\vec{o}\}) = 0$.
4. Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů nemá konečnou dimensi.
5. Podprostor $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ (polynomy stupně nejvýše 3) prostoru $\mathbb{R}[x]$ má dimensi 4. Uspořádaná báze je např. $(x^3, x^2, x, 1)$.

Poznámka

Ať $\dim(L) = n$ a ať M je podmnožina L, která má m prvků.

1. Je-li M lineárně nezávislá, pak $m \leq n$.
2. Ať $m = n$. M je lineárně nezávislá právě tehdy, když platí $\mathrm{span}(M) = L$.

Důsledek (klasifikace lineárních podprostorů $\mathbb{R}^3$)

Lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou přesně tvaru $\mathrm{span}(M)$, kde M (zaměření podprostoru) je lineárně nezávislá podmnožina $\mathbb{R}^3$:

1. Počátek $\{\vec{o}\}$ (když M má nula prvků).
2. Přímky procházející počátkem (když M má jeden prvek).
3. Roviny procházející počátkem (když M má dva prvky).
4. Celé $\mathbb{R}^3$ (když M má tři prvky).

Zobecnění: klasifikace[a] lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$ (dokonce na lineární podprostory prostoru $\mathbb{F}^n$).

[a] To je náročnější na představu, ale geometrický význam je podobný jako pro lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$.

Připomenutí (Téma 2A)

Podprostoru $\mathrm{span}(W_1 \cup W_2)$ říkáme spojení podprostorů W_1 a W_2. Značení: $W_1 \vee W_2$.

Věta (rovnost dvou lineárních podprostorů)

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory prostoru L konečné dimense. Potom $W_1 = W_2$ právě tehdy, když platí rovnost $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.[a]

---

[a] Důkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

1. Ať $W_1 = W_2$. Potom $W_1 \vee W_2 = W_1$. Tudíž platí rovnost $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.
2. Ať $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$. Protože $W_1 \subseteq W_1 \vee W_2$ a oba podprostory mají stejnou dimensi, platí $W_1 = W_1 \vee W_2$.
   Rovnost $W_2 = W_1 \vee W_2$ se dokáže analogicky.
   Celkově: $W_1 = W_1 \vee W_2 = W_2$, hotovo.

Důsledek (důležitý pro Frobeniovu větu, téma 6A)

Ať W je lineární podprostor prostoru L konečné dimense. Pro vektor $\vec{v}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:[a]

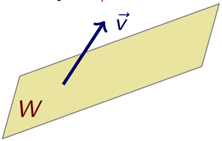
1. $\vec{v} \in W$
2. $\dim(W) = \dim(W \vee \mathsf{span}(\vec{v}))$

---

[a] Důkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

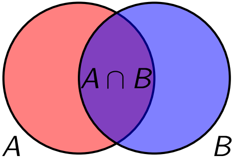
1. Dokažte: $\vec{v} \in W$ iff $\mathsf{span}(\vec{v}) \subseteq W$ iff $W = W \vee \mathsf{span}(\vec{v})$.
2. Použijte větu z předchozí stránky: $W = W \vee \mathsf{span}(\vec{v})$ iff $\dim(W) = \dim(W \vee \mathsf{span}(\vec{v})) = \dim(\underbrace{W \vee (W \vee \mathsf{span}(\vec{v}))}_{=W \vee \mathsf{span}(\vec{v})})$.

Měl by pomoci obrázek situace, kdy $\vec{v} \notin W$:



Připomenutí (princip inkluse a exkluse)

Ať A a B jsou konečné množiny.



Označíme-li počet prvků množin A, B, $A \cap B$ a $A \cup B$ jako $\mathrm{card}(A)$, $\mathrm{card}(B)$, $\mathrm{card}(A \cap B)$ a $\mathrm{card}(A \cup B)$, potom platí rovnost

$$\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimense. Potom, pro libovolné lineární podprostory W_1, W_2, platí rovnost
$\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Slogan pro větu o dimensi spojení a průniku

Jde o „princip inkluse a exkluse“ pro lineární prostory konečné dimense. Dimense hraje roli počtu prvků.[a]

[a] Znovu upozorňujeme: slogan je reklamní heslo, nikoli skutečnost.

Věta (za předpokladu (AC))

Každý lineární prostor L má bázi.

Důkaz.

Náročný: nebudeme dokazovat. ■

Poznámka

Předpoklad (AC). Zkratka (AC) znamená Axiom of Choice, česky: axiom výběru.
Jedná se o tvrzení: kartézský součin libovolného systému neprázdných množin je neprázdná množina.[a]
Tvrzení (AC) je nezávislé na základních axiomech teorie množin.
Srovnejte s axiomem o rovnoběžkách z geometrie.

[a] Ve skriptech je použita ekvivalentní formulace (AC), tzv. Zornovo Lemma.

Pozor: stejný prostor nad různými tělesy má různé vlastnosti

1. Množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je
   1. lineární prostor dimense 1 nad tělesem $\mathbb{C}$,
   2. lineární prostor dimense 2 nad tělesem $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je
   1. lineární prostor dimense 1 nad tělesem $\mathbb{R}$,
   2. lineární prostor nekonečné dimense nad tělesem $\mathbb{Q}$.[a]

[a] Nepovinné: takzvaná Hamelova báze reálných čísel, viz Příklad 3.6.5 skript.

Důsledek: měli bychom vždy psát, nad jakým tělesem o lineárním prostoru mluvíme!

Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 2.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Báze lineárního (pod)prostoru.

   Intuitivní význam: báze je výběr systému souřadnicových os.

2. Dimense lineárního (pod)prostroru.

   Intuitivní význam: dimense je počet souřadnicových os.

Dnešní přednáška

1. Souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi.

   Intuitivní význam: souřadnice vektoru udávají „úseky“ vektoru na jednotlivých souřadnicových osách.

2. Ukážeme velmi užitečný pohled na zobrazení (funkce): kalkulus komutativních diagramů.

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L. Pro každý vektor $\vec{x}$ v L existuje jediný seznam $(a_1, \ldots, a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

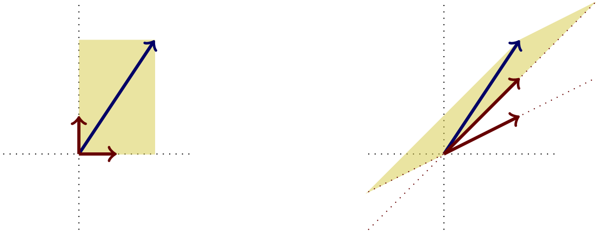
Seznamu $(a_1, \ldots, a_n)$ z předchozí věty říkáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$. Značení:[a]

$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

[a] Tj, souřadnice vektoru $\vec{x}$ chápeme jako další vektor: vektor souřadnic v $\mathbb{F}^n$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy $K_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix})$ jsou uspořádané báze prostoru $\mathbb{R}^2$. (Seznam K_2 je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$.)



$$\mathbf{coord}_{K_2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{coord}_{B}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Důležitá vlastnost kanonické báze

Připomenutí: prostor $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$ má kanonickou bázi $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ať $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor v $\mathbb{F}^n$. Potom $\mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy

$$B_1 = (1, x, x^2) \qquad B_2 = (x^2, x, 1)$$

jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Platí:

$$\mathbf{coord}_{B_1}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{coord}_{B_2}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x^2-2x+4 = 4\cdot 1+(-2)\cdot x+3\cdot x^2, \quad 3x^2-2x+4 = 3\cdot x^2+(-2)\cdot x+4\cdot 1$$

Tvrzení (linearita výpočtu souřadnic)

Ať B je (jakákoli) konečná uspořádaná báze lineárního prostoru L. Potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ platí:[a]

1. $\mathbf{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + \mathbf{coord}_B(\vec{y})$.
2. $\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x})$.

[a] Tyto dvě vlastnosti jsou velmi důležité. Příště je budeme studovat abstraktně (vedou k pojmu lineárního zobrazení).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důsledek: důležitá vlastnost každé uspořádané báze

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze prostoru L.
Potom platí:

$$\mathbf{coord}_B(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\mathbf{coord}_B\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{b}_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Několik připomenutí

1. Zadat zobrazení (také: funkci) $f : X \to Y$ znamená: pro každé $x \in X$ zadat právě jedno $y \in Y$. Toto y značíme $f(x)$ (funkční hodnota v x).
   Píšeme[a] i $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto f(x)$.
2. Pro zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ značíme $g \cdot f : X \to Z$ složené zobrazení $x \mapsto g(f(x))$.

---

[a] Důležité je rozlišovat: šipka $f : X \to Y$ versus šipka s patkou $x \mapsto f(x)$.

Poznámky

- Slova *funkce* a *zobrazení* znamenají totéž.
- Skládání zobrazení značíme stejně jako násobení (tj. tečkou). Uvidíme později, že skládání zobrazení skutečně je jistý druh násobení.

Několik připomenutí (pokrač.)

3. Přesná definice zobrazení $f : A \to B$ zní:

   Zobrazení $f : A \to B$ je podmnožina $A \times B$ taková, že pro všechna $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$.

   Potom lze dokázat:

   1. Pro libovolnou množinu B existuje právě jedno zobrazení $f : \emptyset \to B$.
   2. Pro libovolnou množinu A existuje právě jedno zobrazení $f : A \to \{b\}$.
   3. Je-li A neprázdná množina, pak neexistuje zobrazení $f : A \to \emptyset$.

Několik připomenutí (pokrač.)

4. Komutativní trojúhelník:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

znamená $h = g \cdot f$, tj. $h(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in X$.

5. Komutativní čtverec:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$

znamená $h \cdot f = k \cdot g$, tj. $h(f(x)) = k(g(x))$ pro všechna $x \in A$.

Několik připomenutí (pokrač.)

6. „Slepování" komutativních diagramů:[a]

jestliže
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "x"'] & Y \end{tikzcd}$$
a
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$
jsou komutativní,

pak je i
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[rr, bend left, "g \cdot f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "x"'] \arrow[rr, bend right, "y \cdot x"'] & Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$
komutativní.

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.

Několik připomenutí (pokrač.)

7. „Trhání“ komutativních diagramů:[a]

Jestliže je

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[rr, bend left, "g \cdot f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "x"'] \arrow[rr, bend right, "y \cdot x"'] & Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$

komutativní,

pak ani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "x"'] & Y \end{tikzcd}$$

ani

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$

komutativní být nemusí.

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.

Několik připomenutí (pokrač.)

8. Zobrazení $f : X \to Y$ je prosté (také: injektivní nebo injekce), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.
9. Zobrazení $f : X \to Y$ je na (také: surjektivní nebo surjekce), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x) = y$.
10. Zobrazení $f : X \to Y$ je bijekce (také: vzájemně jednoznačné), když f je injekce a surjekce současně.

Známá fakta

1. Identita na X, tj. $\mathrm{id}_X : X \to X$, kde $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$, je bijekce.
2. Platí $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ a $\mathrm{id}_Y \cdot f = f = f \cdot \mathrm{id}_X$, kdykoli je skládání definováno.
3. Složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce.
4. $f : X \to Y$ je bijekce právě tehdy, když existuje jednoznačně určené[a] $g : Y \to X$ tak, že $g \cdot f = \mathrm{id}_X$ a $f \cdot g = \mathrm{id}_Y$.

[a] Tomuto jednoznačně určenému zobrazení se říká inverse zobrazení f a značí se také f^{-1}.

Lineární zobrazení

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Báze lineárního prostoru a souřadnice vektoru vzhledem ke konečné uspořádané bázi.

Dnešní přednáška

1. Lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ zobecňuje zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$, dané konečnou uspořádanou bází B.
2. Zavedeme pojem matice lineárního zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ (vzhledem ke kanonickým bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Definice (lineární zobrazení)

Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$, pro vš. $\vec{x}$, $\vec{x}'$ z L_1, říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.

Příklady

1. Ať L má uspořádanou bázi B o n prvcích. Zobrazení $\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární (minulá přednáška).
2. Řada dalších...

Poznámka (princip superposice)

$\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i)$$

pro vš. a_i z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}_i$ z L_1.

Tvrzení (základní algebraické vlastnosti lineárních zobrazení)

1. Složení lineárních zobrazení je lineární. Identita je lineární zobrazení.
2. Jsou-li $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ a $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ lineární zobrazení, pak i zobrazení
   1. $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ je lineární, kde $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x})$.
   2. $a \cdot \mathbf{f}$ je lineární (a je skalár z $\mathbb{F}$), kde $(a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důsledek (lineární prostor lineárních zobrazení)

Pro pevné lineární prostory L_1 a L_2 nad $\mathbb{F}$ je množina všech lineárních zobrazení z L_1 do L_2 lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Tento prostor značíme $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

Věta (lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)

Ať B je báze[a] lineárního prostoru L_1, ať L_2 je libovolný lineární prostor. Pak zadat

1. libovolné zobrazení $h : B \longrightarrow L_2$,

je totéž jako zadat

2. lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$.

[a] Připomenutí (téma 3A): každý lineární prostor má bázi.

Důkaz.

Pro prostory konečné dimense: princip superposice.

Pro obecné prostory: mírně složitější. ■

Příklad (popis libovolného lineárního zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$)

Připomenutí: $K_s = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s)$ je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^s$.
Zadat lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ znamená zadat seznam s (ne nutně různých) hodnot

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{e}_s) = \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

v lineárním prostoru $\mathbb{F}^r$.
Tomuto seznamu říkáme matice (o r řádcích a s sloupcích).

Definice (matice)

Matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{F}$ o r řádcích a s sloupcích je tabulka[a]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

[a] Budeme také používat položkový zápis $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ nebo sloupcový zápis $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$.
Nebudeme používat: matice typu $r \times s$, rozměrů $r \times s$, atd., případně ještě horší značení $n \times m$. (Nebo $m \times n$?)

Poznámka

Matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ o r řádcích a s sloupcích budeme ztotožňovat s lineárním zobrazením

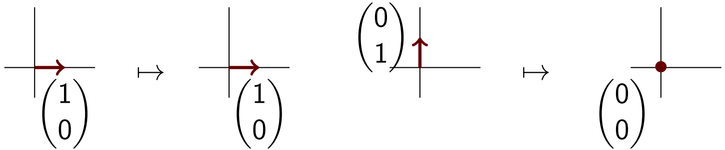
$$\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

z prostoru $\mathbb{F}^s$ do prostoru $\mathbb{F}^r$, a budeme psát $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Kanonická báze $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ v $\mathbb{R}^2$. Matice některých lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (vzhledem ke K_2) jsou:

1. Projekce na osu x je ztotožněna s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



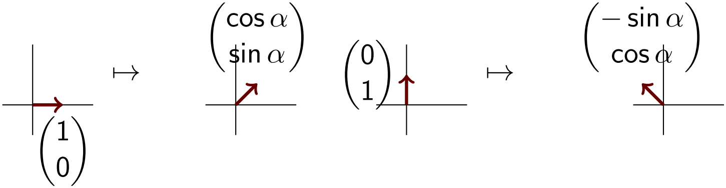
Analogicky: projekce na osu y je ztotožněna s maticí

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

2. Rotace (o úhel α) je ztotožněna s maticí

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



3. Změna měřítka ($a \neq 0$ a $b \neq 0$) je ztotožněna s maticí $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Pro $a = 1$, $b = -1$ dostaneme reflexi: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

4. Zkosení[a] (také: shear) je ztotožněno s maticí

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

[a] Speciální typy zkosení (nad obecným tělesem) budou hrát důležitou roli při řešení soustav rovnic.

Co už nyní víme?

Například diagram

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2$$

znamená následující: nejprve otočte o úhel α, potom proveďte projekci na osu x.

Značit se to musí $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{R}_\alpha$ (jde o skládání lineárních zobrazení). Co ale „násobení tabulek“ znamená? Odpověď: jde o novou matici.

Jak novou matici najít?

$$\mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec matice } \mathbf{R}_\alpha \mapsto ???$$

1. Násobení (skládání) matic: příští přednáška (téma 4B).
2. Zbytek dnešní přednášky: jak obecná matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ „zachází“ s obecným vektorem z prostoru $\mathbb{F}^s$?

Tvrzení (výpočet hodnoty matice A v obecném vektoru x)

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a pro vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ platí

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Důkaz.

Protože $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$, tak $\mathbf{A} : \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$. ∎

Značení (násobení matice vektorem)

Vektor $\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$ značíme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Příklad (rotace vektoru v $\mathbb{R}^2$)

Rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Potom součin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dává výsledek otočení vektoru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ o úhel α.

Například pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Poznámka (další význam zápisu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x}$ v $\mathbb{F}^s$, kóduje hodnotu lineárního zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ v bodě $\mathbf{x}$.

Zvolme pevné $\mathbf{b}$ v $\mathbb{F}^r$. Hledejme všechna $\mathbf{x}$ v $\mathbb{F}^s$ taková, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Na tento problém se lze dívat dvěma způsoby:

1. Hledáme vzor bodu $\mathbf{b}$ při lineárním zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$.
2. Řešíme soustavu lineárních rovnic.
   Počet sloupců matice $\mathbf{A}$ je počet neznámých, počet řádků matice $\mathbf{A}$ je počet rovnic v soustavě.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{je} \quad \begin{aligned} x_1 \qquad\quad - 3x_3 + 4x_4 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Algebra matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Pojem lineárního zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ a jeho maticový zápis (vzhledem ke kanonickým bázím).

Dnešní přednáška

1. Zavedeme základní algebraické operace s maticemi.
2. V příští přednášce vše zobecníme pro prostory konečných dimensí; zavedeme pojem matice lineárního zobrazení (vzhledem k pevně zvoleným bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Již víme: $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Jak se operace v $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ projeví na „manipulaci s tabulkami“? Použijeme sloupcový zápis matic.

Pro $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s)$ a skalár a z $\mathbb{F}$ je:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ matice se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$. Zápis $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ čteme součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.
2. $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je matice se sloupcovým zápisem $(a \cdot \mathbf{a}_1, \ldots, a \cdot \mathbf{a}_s)$. Zápis $a \cdot \mathbf{A}$ čteme součin skaláru a a matice $\mathbf{A}$.

Nulový vektor[a] v lineárním prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je matice $\mathbf{O}_{s,r} = \underbrace{(\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o})}_{s\text{-krát}}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor v $\mathbb{F}^r$.

[a] Říkáme také: nulová matice.

Příklad: výpočty v $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

1. Příklad součtu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Příklad skalárního násobku:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Nulový vektor v v $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je:

$$\mathbf{O}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámky k součtu matic a ke skalárnímu násobku matic

Sčítání matic a skalární násobení skalárem jsou operace v lineárním prostoru $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$. Přirozená čísla s a r jsou pevná. Proto:

1. Sčítat můžeme pouze matice stejných rozměrů. Pro matice různých rozměrů není sčítání definováno.

   Sloupcový zápis součtu

   $$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) + (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$$

   dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li sečíst dvě matice stejných rozměrů, sečtěte položky na odpovídajících posicích.

2. Sloupcový zápis skalárního násobku

   $$a \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = (a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$$

   dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li matici vynásobit skalárem, vynásobte tímto skalárem každou položku matice.

Vlastnosti součtu matic a skalárního násobku matic

Protože $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
3. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
4. Pro každé $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ existuje právě jedno[a] $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ tak, že $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{s,r}$.
5. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
6. $a \cdot (b \cdot \mathbf{A}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
7. $a \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \cdot \mathbf{A} + a \cdot \mathbf{B}$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
8. $(a + b) \cdot \mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}$ z $\mathrm{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.

---

[a] Tomuto jednoznačně určenému $\mathbf{B}$ říkáme opačná matice k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $-\mathbf{A}$.

Připomenutí značení (téma 4A)

Matice $\mathbf{A}$ se sloupcovým zápisem $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$, dané předpisem

$$\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \ldots, s$$

Princip superposice dává

$$\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{e}_j$ značíme $\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot \mathbf{a}_j$ jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Proto

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Definice (součin matic)

Pro situaci[a]

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{F}^s & \xrightarrow{\ \mathbf{A}\ } & \mathbb{F}^p & \xrightarrow{\ \mathbf{B}\ } & \mathbb{F}^r \\
\mathbf{e}_j & \longmapsto & \mathbf{a}_j & \longmapsto & \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_j
\end{array}
$$

je $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ matice,[b] jejíž j-tý sloupec je $\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_j$, kde $\mathbf{a}_j$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Ve sloupcovém zápisu tedy platí $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}_s)$.

Matici $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ říkáme součin matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$.

---

[a] Diagram okamžitě dává rozměrovou zkoušku pro součin matic $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$: počet řádků matice $\mathbf{A}$ musí být roven počtu sloupců matice $\mathbf{B}$. Jindy součin matic nedefinujeme, protože by skládání nedávalo smysl.

[b] Položkový zápis součinu $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$: pro $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\dots,p,j=1,\dots,s}$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})_{i=1,\dots,r,k=1,\dots,p}$ je $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ matice s položkami $(c_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\cdot a_{kj}$$

Příklad (matice složených lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Projekce na osu x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „nejprve otočte o úhel α, potom spočtěte projekci na osu x“.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „nejprve spočtěte projekci na osu x, potom otočte o úhel α“.

Příklad (reflexe podle osy, která svírá úhel α s osou x)

Jde o složené zobrazení: nejdříve rotace o úhel $-\alpha$, potom reflexe, nakonec rotace o úhel α.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Poznámka

Analogicky lze vytvořit matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Aplikace: matematická analýza, fyzika, grafika.[a]

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 4.1.6 a 4.2.9 skript.

Vlastnosti operací s maticemi

1. Pro součin platí asociativní zákon $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$, kdykoli jsou jednotlivé součiny definovány.
2. Obecně neplatí komutativní zákon $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (i když jsou oba součiny definovány).
3. Pro každé n definujeme jednotkovou matici[a] $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ takto: $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou vektory kanonické báze $\mathbb{F}^n$.

   Potom pro každou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ platí:
   $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s$.

[a] Matice $\mathbf{E}_n$ je maticí identického lineárního zobrazení $\mathbf{id} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$.

Důkaz.

Okamžitě z vlastností lineárních zobrazení. ■

Příklad (popis obrazu projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zajímá nás, zda vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ je projekcí nějakého vektoru $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. To lze zjistit algebrou matic:

$$\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Žádný vektor $\mathbf{x}$, jehož projekce na osu x je vektor $\mathbf{b}$, neexistuje.

To ale znamená: soustava rovnic $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení!

Příklad (popis vzoru projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na $\mathbf{b}$ projekcí zobrazí. To lze zjistit algebrou matic:

$$\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Řešením soustavy rovnic $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je množina všech vektorů $\mathbf{x}$ tvaru $\begin{pmatrix} 3 \\ x_2 \end{pmatrix}$, kde x_2 je libovolné reálné číslo.[a]

---

[a] Řešení lze napsat i ve tvaru $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Jak uvidíme, tento druhý způsob zápisu řešení bude mít mnohé výhody.

Příklad (projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$ není invertibilní)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x, ztotožněná s maticí
$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Existují matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{E}_2"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{P}_x"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{P}_x"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{E}_2"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{B}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \quad ?$$

Intuice: žádné takové matice neexistují, protože matice jsou lineární zobrazení.

Jak intuici dokázat? Algebrou matic!

Příklad (projekce na osu x v $\mathbb{R}^2$ není invertibilní, pokrač.)

Ptáme se, zda existují matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ takové, že platí rovnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takové matice neexistují, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek

Nenulovost čtvercové matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nezaručuje existenci matic $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, které by řešily rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ a $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Proč nás to zajímá?

Otázka řešitelnosti obecných maticových rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}$ je důležitá. Proč?
Jde o zobecnění řešení soustav lineárních rovnic.

Lineární zobrazení, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.3, 3.4 a 9.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ (sloupcový zápis matice, každý sloupec $\mathbf{a}_j$ je vektor z $\mathbb{F}^r$) je ztotožněna s lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, $\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$.

   Operace s maticemi odpovídají operacím s lineárními zobrazeními.

Dnešní přednáška

1. Pojmy jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení.

   Tyto pojmy umožní jemnější klasifikaci lineárních zobrazení.

2. Pojem matice obecného lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k obecným uspořádaným bázím. Prostory L_1 a L_2 musí mít konečnou dimensi.

Připomenutí (témata 4A a 3B)

1. Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}$, $\vec{x}'$ z L_1, říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.
2. Zápis $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ znamená[a] $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$-tý sloupec $\mathbf{A}$.
   Tudíž platí $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$.
3. Trojúhelník

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^s \arrow[rr, "\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}"] \arrow[dr, "\mathbf{A}"'] & & \mathbb{F}^r \\
& \mathbb{F}^p \arrow[ur, "\mathbf{B}"'] &
\end{tikzcd}
$$

   je komutativní.

---

[a] V terminologii dnešní přednášky: $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je maticí zobrazení $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$-tý sloupec $\mathbf{A}$ vzhledem ke kanonické bázi. Ale nepředbíhejme

Definice (speciální vlastnosti lineárních zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ říkáme:

1. monomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ injektivní (také: prosté) zobrazení.
2. epimorfismus, je-li $\mathbf{f}$ surjektivní (také: na) zobrazení.
3. isomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ bijektivní (také: prosté a na) zobrazení.[a]

[a] Ekvivalentně: k zobrazení $\mathbf{f}$ existuje inversní zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ a toto inversní zobrazení je opět lineární.

Tvrzení

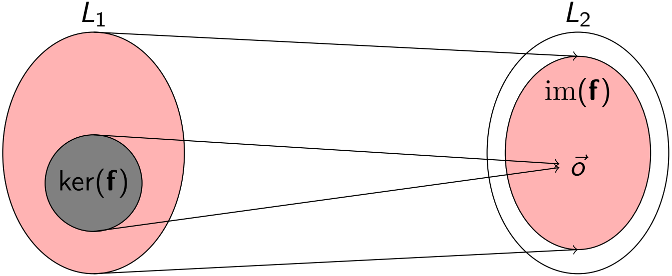
Složení monomorfismů/epimorfismů/isomorfismů je monomorfismus/epimorfismus/isomorfismus. Identita je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška.

Definice (obraz a jádro)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množině
$\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}$ říkáme jádro $\mathbf{f}$, množině
$\mathrm{im}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \text{ z } L_1\}$ říkáme obraz $\mathbf{f}$.



Slogany (tj. reklamní hesla, nikoli skutečnost)

Jádro $\mathbf{f}$ říká, jak moc je $\mathbf{f}$ monomorfismus.
Obraz $\mathbf{f}$ říká, jak moc je $\mathbf{f}$ epimorfismus.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Pak $\ker(\mathbf{f})$ je podprostor L_1, $\mathrm{im}(\mathbf{f})$ je podprostor L_2.[a]

[a] Obecněji: $\{\mathbf{f}(\vec{w}) \mid \vec{w} \in W\}$ je podprostor L_2, pro jakýkoli podprostor W prostoru L_1.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (defekt a hodnost lineárního zobrazení)

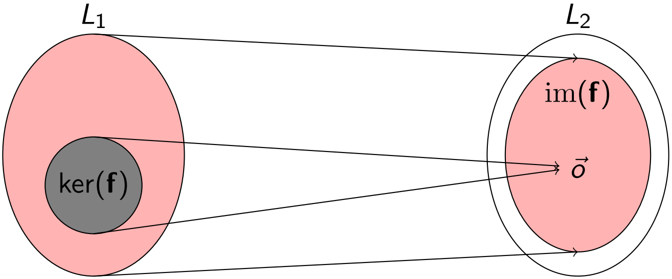
Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Číslu $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$ říkáme defekt lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ a číslu $\mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{im}(\mathbf{f}))$ říkáme hodnost (také: rank) lineárního zobrazení $\mathbf{f}$.

Tvrzení (Věta o dimensi jádra a obrazu)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak $\mathrm{def}(\mathbf{f}) + \mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_1)$.

Důkaz.

Bez důkazu (důkaz je například ve skriptech, Věta 3.3.6).



$\mathrm{def}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{ker}(\mathbf{f}))$ $\qquad$ $\mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{im}(\mathbf{f}))$ ■

Tvrzení (charakterisace monomorfismů)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak je ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je monomorfismus.
2. $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = 0$.
3. $\mathbf{f}$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důsledek (monomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je monomorfismus právě tehdy, když soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení.

Tvrzení (charakterisace isomorfismů)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak je ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je isomorfismus.
2. $\mathbf{f}$ je monomorfismus a epimorfismus současně.
3. $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = 0$ a $\mathrm{im}(\mathbf{f}) = L_2$ současně.
4. $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.
5. $\mathbf{f}$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina) a každá rovnice $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ má alespoň jedno řešení.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důsledek (isomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je isomorfismus právě tehdy, když $s = r$ a každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.

Definice (regulární a singulární matice)

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ typu je regulární (také: invertibilní, také: isomorfismus), pokud existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}^{-1}$ taková, že platí rovnosti $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Matici $\mathbf{A}^{-1}$ říkáme inverse matice $\mathbf{A}$.
Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je singulární, pokud není regulární.

Příklad (rotace o úhel α v $\mathbb{R}^2$ je isomorfismus)

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je regulární (invertibilní) matice.[a]

[a] Inversním zobrazením rotace o úhel α je rotace o úhel $-\alpha$.

Důsledek (isomorfismy prostorů konečné dimense)

Ať $\dim(L_1) = \dim(L_2) = n$. Potom je, pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je monomorfismus.
2. $\mathbf{f}$ je epimorfismus.
3. $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

Příklad (důležité a užitečné: Lagrangeova interpolace)

Ať $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá reálná čísla. Lineární zobrazení

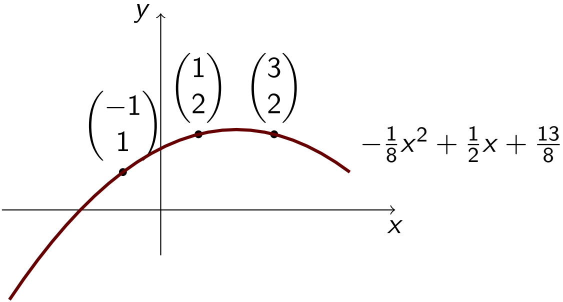
$$\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \to \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}$$

je monomorfismus, tudíž isomorfismus.

Příklad (Lagrangeova interpolace, pokrač.)

$\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)}$ je isomorfismus: pro každou n-tici $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^n$ existuje

jediný polynom[a] $p_{(b_1,\ldots,b_n)}(x)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$ tak, že platí $p_{(b_1,\ldots,b_n)}(a_i) = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.



[a] Říká se mu Lagrangeův interpolační polynom, viz skripta, Příklad 3.3.9.

Tvrzení (důležité)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze prostoru L. Potom výpočet souřadnic v bázi B

$$\mathbf{coord}_B : L \to \mathbb{F}^n, \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$$

je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška. ■

Poznámka (důležitá)

Protože isomorfní lineární prostory se z abstraktního hlediska nijak neliší, vidíme: až na isomorfismus neexistují jiné konečně dimensionální lineární prostory nad $\mathbb{F}$ než prostory tvaru $\mathbb{F}^n$.

Definice (matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Matice zobrazení $\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C) je taková matice $\mathbf{A_f}$, pro kterou platí

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r \\ L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

neboli:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{coord}_B(\vec{x}) \arrow[r, mapsto] & \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{x})) \\ \vec{x} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \mathbf{f}(\vec{x}) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

pro každý vektor $\vec{x}$.

Tvrzení (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Potom matice $\mathbf{A_f}$ má r řádků a s sloupců. Navíc j-tý sloupec matice $\mathbf{A_f}$ je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.

Důkaz.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{A_f} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\
& \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r & \\
& L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Věta (matice složeného zobrazení)

Ať L_1, L_2, L_3 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$, $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_p)$ a $D = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_r)$. Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ a $\mathbf{g} : L_2 \to L_3$ jsou lineární zobrazení s maticemi $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C) a $\mathbf{A}_\mathbf{g}$ (vzhledem k C a D). Potom $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \to L_3$ má matici $\mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f}$ (vzhledem k B a D).

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^p \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & L_3 \arrow[u, "\mathbf{coord}_D"']
\end{tikzcd}
$$

Věta (matice isomorfismu)

Ať L_1, L_2 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$, $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$. Ať lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je isomorfismus s maticí zobrazení $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C). Potom existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}^{-1}$ splňující rovnosti $\mathbf{A}_\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f}^{-1}$. Matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}^{-1}$ je matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}^{-1}}$ inversního zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ (vzhledem k C a B).[a]

---

[a] Tj. regulární (invertibilní) matice jsou přesně matice isomorfismů.

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{A}_{\mathbf{f}^{-1}}) \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{f}^{-1}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"']
\end{tikzcd}
$$

Proto $\mathbf{A}_\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f} = \mathbf{E}_n$. Druhá rovnost analogicky. ∎

Příklad (výpočet matice pro derivování)

$\mathbb{F}^{\leq 3}[x]$ je prostor polynomů stupně ≤ 3 nad tělesem $\mathbb{F}$. Báze $B = (x^3, x^2, x^1, 1)$. Zobrazení

$$\begin{aligned} &\mathbf{der} : \mathbb{F}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{F}^{\leq 3}[x], \\ &(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \mapsto (3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1) \end{aligned}$$

je lineární a má následující matici vzhledem k B:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pro druhou derivaci: spočítáme součin $\mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}}$, atd.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nekanonické bázi)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy:

1. „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
2. „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Vzhledem k nekanonické bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ má tedy $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jak spočítat matici $\mathbf{B_f}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2?

Příklad (pokrač.)

Myšlenka řešení: hledaná matice $\mathbf{B_f}$ musí splňovat rovnici $\mathbf{B_f} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, kde

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{f}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"']
\end{tikzcd}$$

Jak najít matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$? Jednoduše: jsou to matice identického zobrazení, navíc evidentně platí $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Příklad (pokrač.)

Platí (díky tomu, co jsme již dokázali)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{B_f} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Příští přednáška (téma 5B)

Konceptuální hledání (analogií) matic $\mathbf{T}$ a $\mathbf{S}$: takzvané matice transformace souřadnic.

Transformace souřadnic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 9.2 a 9.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Lineární zobrazení.
2. Výpočet souřadnic vzhledem k bázi je lineární zobrazení.
3. Matice libovolného lineárního zobrazení mezi lineárními prostory konečné dimense vzhledem k pevně zvoleným bázím.

Dnešní přednáška

1. Matice transformace souřadnic v jedné bázi na souřadnice ve druhé bázi. Jde opět o matici jistého lineárního zobrazení.
2. Uvidíme, že pro stále více problémů je třeba se naučit řešit maticové soustavy.[a]

[a] Řadu příkladů tedy v této přednášce nedopočítáme až do konce.

Příští přednáška

1. Koncepčně čistý a geometricky jasný způsob řešení soustav lineárních rovnic, maticových rovnic, atd.

Připomenutí (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Potom matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ má r řádků a s sloupců a j-tý sloupec matice $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{A}_\mathbf{f} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\
& \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x}\mapsto\mathbf{A}_\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r & \\
& L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Definice (matice transformace souřadnic)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ jsou uspořádané báze prostoru L. Matici[a] $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$, která splňuje

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[r, mapsto] & j\text{-tý sloupec } \mathbf{T}_{B\mapsto C} = \mathbf{coord}_C(\vec{b}_j) \\
\vec{b}_j \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \vec{b}_j \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B\mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\
L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"']
\end{tikzcd}
$$

říkáme matice transformace souřadnic z báze B do báze C (také: matice transformace souřadnic v bázi B na souřadnice v bázi C).

---

[a] Všimněte si značení: v dolním indexu $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je šipka s patkou (bázi B „posíláme“ na bázi C).

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace souřadnic)

1. Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\vec{x})$, pro každý vektor $\vec{x}$ v L.
   To plyne přímo z definice matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\ L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

2. Matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je vždy regulární. Platí $(\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1} = \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.
   To plyne z toho, že $\mathbf{id} : L \to L$ je isomorfismus.

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace, pokrač.)

3. Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$. To je triviální:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\ L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

4. Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto D} = \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C}$. To plyne z vlastností matice složeného zobrazení:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\ L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_D"'] \end{tikzcd}$$

Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ nad $\mathbb{R}$ máme uspořádané báze $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = ((x-1)^3, (x-1)^2, x-1, 1)$.

Pro polynom $p(x) = -3x^2 + 6x + 3$ z $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ hledáme $\mathbf{coord}_C(p(x))$. Víme, že $\mathbf{coord}_C(p(x)) = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(p(x))$.

Protože $\mathbf{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, stačí tedy znát[a] matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$.

$$\mathbf{T}_{B \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

[a] Uvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto B} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1})$$

Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

Jsou dány tři konečné báze B, C a D prostoru L. Spočtěte $\mathbf{coord}_B(4 \cdot \vec{x} + 12 \cdot \vec{y} + 3 \cdot \vec{z})$, pokud znáte $\mathbf{coord}_B(\vec{x})$, $\mathbf{coord}_C(\vec{y})$ a $\mathbf{coord}_D(\vec{z})$.

$$\mathbf{coord}_B(4 \cdot \vec{x} + 12 \cdot \vec{y} + 3 \cdot \vec{z}) =$$

$$4 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + 12 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{y}) + 3 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{z}) =$$

$$4 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + 12 \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} \cdot \mathbf{coord}_C(\vec{y}) + 3 \cdot \mathbf{T}_{D \mapsto B} \cdot \mathbf{coord}_D(\vec{z}).$$

Poznámka (konceptuální výpočet $\mathbf{T}_{B\mapsto C}$ v prostoru $\mathbb{F}^n$)

Ať $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$ jsou libovolné báze prostoru $\mathbb{F}^n$.

Připomenutí: kanonická (také: standardní) báze $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{F}^n$.

1. Je snadné nalézt matice $\mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ a $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n}$.
   1. Do j-tého sloupce $\mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{b}_j$ v kanonické bázi K_n.
   2. Do j-tého sloupce $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{c}_j$ v kanonické bázi K_n.
2. $\mathbf{T}_{B\mapsto C} = \mathbf{T}_{K_n\mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n} = (\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$.

Stačí tedy vyřešit[a] maticovou rovnici $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$.

---

[a] Uvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C\mapsto K_n} \mid \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n})$$

Příklad (nalezení báze, známe-li matici transformace)

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$. Tedy

$\mathbf{T}_{B \mapsto K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, kde K_3 je kanonická báze $\mathbb{R}^3$.

Nalezněte bázi $C = \left(\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \right)$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby platila rovnost $\mathbf{T}_{B \mapsto C} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (pokrač.)

Protože C je báze a protože K_3 je kanonická báze, víme, že platí:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{23} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C \mapsto K_3}$$

Protože platí $\mathbf{T}_{C \mapsto K_3} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_3} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_3} \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1}$, dosadíme a spočítáme

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Věta (změna matice zobrazení při změně bází)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, $\dim(L_1) = n$, $\dim(L_2) = m$.
Ať B a B' jsou báze prostoru L_1 a ať C a C' jsou báze prostoru L_2.
Jestliže $\mathbf{A_f}$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B a C, pak součin
$\mathbf{T}_{C\mapsto C'} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}_{B'\mapsto B}$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B' a C'.

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x}\mapsto\mathbf{T}_{B'\mapsto B}\cdot\mathbf{x}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{x}\mapsto\mathbf{T}_{C\mapsto C'}\cdot\mathbf{A_f}\cdot\mathbf{T}_{B'\mapsto B}\cdot\mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x}\mapsto\mathbf{A_f}\cdot\mathbf{x}"] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "\mathbf{x}\mapsto\mathbf{T}_{C\mapsto C'}\cdot\mathbf{x}"] & \mathbb{F}^m \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B'}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{f}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{C'}"']
\end{tikzcd}
$$

∎

Výpočet matice lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k libovolným bázím

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je báze L_1 a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m)$ je báze prostoru L_2.

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A_f}$ zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k jistým bázím $easy_n = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n)$ a $easy_m = (\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_m)$ prostorů L_1 a L_2 se snadno určí.

1. Matice transformací souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ a $\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m}$ se také určí snadno:
   1. Do j-tého sloupce matice $\mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ napíšeme souřadnice vektoru $\vec{b}_j$ vzhledem k bázi $easy_n$.
   2. Do j-tého sloupce matice $\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m}$ napíšeme souřadnice vektoru $\vec{c}_j$ vzhledem k bázi $easy_m$.
2. Platí: $\mathbf{T}_{easy_m \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m})^{-1}$.
3. Součin matic $\mathbf{T}_{easy_m \mapsto C} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ je matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a C.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nestandardní bázi)

Nalezněte matici **A** zobrazení **der** : $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ vzhledem k bázi $C = (x^3 + 3x^2, 3x^2 + 4x - 23, x - 1, 42)$.
Víme, že **der** má následující matici vzhledem k $B = (x^3, x^2, x, 1)$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$\mathbf{T}_{C \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -23 & -1 & 42 \end{pmatrix}$$

Tedy: $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.

Závěrečné poznámky k transformaci souřadnic

1. Jakoukoli čtvercovou regulární matici $\mathbf{T}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ lze považovat za matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$, kde K_n je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$ a báze B je tvořena sloupci matice $\mathbf{T}$.
2. Je-li $\mathbf{A_f}$ matice zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k bázím B a C, pak matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k nějakým bázím B' a C' má tvar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějaké regulární matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$.

   Speciální případ: $L_1 = L_2$, $B = C$ a $B' = C'$. Pak matice $\mathbf{A_f}$ přejde na matici tvaru $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Poznámky (pokrač.)

3. Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si podobné (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

   Podobné matice jsou tedy ty, které popisují stejné lineární zobrazení, každá matice jej vyjadřuje v jiné bázi. To využijeme při hledání vlastních hodnot lineárních zobrazení (později).

Příklad (Připomenutí příkladu z minulé přednášky)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy:

1. „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
2. „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Příklad (pokrač.)

Vzhledem k nekanonické bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vzhledem ke kanonické bázi K_2 lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici[a]

$$\mathbf{B_f} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Platí: $\mathbf{A_f} \approx \mathbf{B_f}$.

Matice $\mathbf{A_f}$ je „přehlednější“ než matice $\mathbf{B_f}$ (matice $\mathbf{A_f}$ vypovídá okamžitě o geometrické povaze zobrazení $\mathbf{f}$).

[a] Minulá přednáška.

GEM a soustavy lineárních rovnic, část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice jako (speciální) lineární zobrazení. Obecná lineární zobrazení lze representovat maticí (vzhledem k zadaným bázím).
2. Algebra matic (sčítání matic, násobení matic skalárem, násobení matic mezi sebou).
3. Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kóduje soustavu lineárních rovnic.

Dnešní přednáška

1. Gaussova eliminační metoda (GEM) jako universální a systematická metoda řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Příští přednáška

1. Maticové rovnice.
2. Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Připomenutí (maticový zápis soustavy lineárních rovnic)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $r \times s$ nad $\mathbb{F}$, $\mathbf{x}$ je v $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{b}$ je v $\mathbb{F}^r$, kóduje soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{F}$.

Terminologie: $\mathbf{A}$ je matice soustavy, $\mathbf{b}$ je pravá strana rovnice, $\mathbf{x}$ je vektor neznámých. Matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ (také: $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$) je rozšířená matice soustavy.

Například

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -42 \end{pmatrix}$$

je zápis soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & -42 \end{array}$$

nad $\mathbb{R}$.

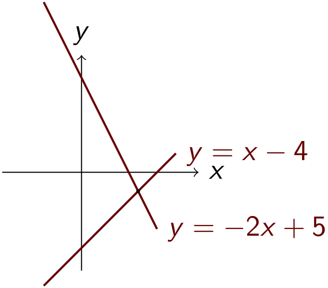
Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav)

Pro soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$ je řešení

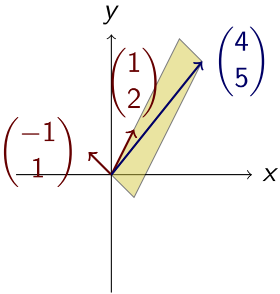
1. Průsečík dvou přímek: $x - y = 4$ a $2x + y = 5$:



Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav, pokrač.)

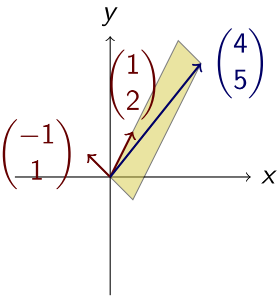
2. Pravá strana je lineární kombinací sloupců matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

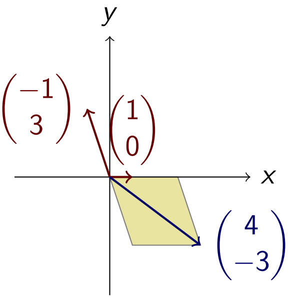


Řešení jsou koeficienty této lineární kombinace.

Výhoda druhého pohledu na řešení soustav



lze převést isomorfismem na



Koeficienty lineární kombinace situace napravo se najdou snadno.

Gaussova eliminační metoda je přesně postupné převádění vhodnými isomorfismy do příjemné polohy!

Ve zbytku přednášky

1. Nejprve se zaměříme na problém řešení soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   Konvence: Nebude-li řečeno jinak, je soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve zbytku přednášky soustavou r rovnic o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

   Soustavy budeme většinou zapisovat rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nebo $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$.

   Zformulujeme a dokážeme důležitý výsledek: Frobeniovu větu o řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

2. Poté vyřešíme obecný problém maticových rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.
3. Jako technický prostředek použijeme Gaussovu eliminační metodu (zkráceně: GEM). GEM převádí matice (a tím i soustavy) na „příjemný“ tvar.

Definice (horní blokový tvar matice)

Matice **M** je v horním blokovém tvaru, jsou-li splněny následující dvě podmínky:[a]

1. Každý nenulový řádek matice **M** je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
2. Každý pivot (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice **M** je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

[a] Pozorování: **M** je v horním blokovém tvaru iff $(\mathbf{M} \mid \mathbf{o})$ je v horním blokovém tvaru.

Příklad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je v horním blokovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{31} & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{23} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{42} & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

Není v horním blokovém tvaru.

Věta (Gaussova eliminační metoda (GEM) nad $\mathbb{F}$)

Jakoukoli matici $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{F}$ lze konečným počtem tzv. řádkových elementárních úprav převést na horní blokový tvar.
Řádkové elementární úpravy jsou tří typů:

(I) Přičtení skalárního násobku řádku matice k jinému řádku matice.

(II) Prohození dvou řádků v matici.

(III) Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem.

Důkaz.

Nebudeme dělat (viz skripta, Věta 6.3.10.). ■

Poznámky

GEM: použití řádkových elementárních úprav dané matice s cílem zapsat danou matici v horním blokovém tvaru. Při dosažení tohoto tvaru říkáme, že GEM skončila.

Příklad (Přičtení skalárního násobku řádku k řádku)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 11 & 21 & 28 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

Tudíž: přičtení skalárního násobku řádku k danému řádku je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (prohození dvou řádků v matici)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{array}$$

Tudíž: prohození dvou řádků je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -20 & -5 & -35 & -15 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ -5R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array}$$

Tudíž: vynásobení řádku matice nenulovým skalárem je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Definice (ekvivalentní soustavy)

Řekneme, že soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ r rovnic o s neznámých jsou ekvivalentní[a] (značení: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$), když pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

[a] Slogan: Ekvivalentní soustavy stejných rozměrů mají stejná řešení.

Tvrzení (základní vlastnosti ekvivalence soustav)

Platí:

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Jestliže $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$, pak $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') \sim (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
3. Jestliže $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') \sim (\mathbf{A}'' \mid \mathbf{b}'')$, pak $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}'' \mid \mathbf{b}'')$.

Ať $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ je jakýkoli isomorfismus. Potom platí

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$.
2. $\mathrm{rank}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b})) = \mathrm{rank}((\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}))$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Shrnutí

Ať $\mathbf{M}$ je jakákoli nad $\mathbb{F}$ o r řádcích. Potom platí:

1. Každá elementární úprava matice $\mathbf{M}$ je dána součinem $\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ pro vhodný „elementární" isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$.
2. Je-li matice $\mathbf{M}'$ horním blokovým tvarem[a] matice $\mathbf{M}$, pak
   1. Existuje isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ tak, že $\mathbf{M}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$, kde k je nějaké přirozené číslo a $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k$ jsou „elementární" isomorfismy.
   2. Platí $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M}')$ a $\operatorname{def}(\mathbf{M}) = \operatorname{def}(\mathbf{M}')$.

Speciálně: pro $\mathbf{M}$ ve tvaru $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ lze elementárními úpravami převést každou soustavu na horní blokový tvar $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$. Navíc platí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$.

[a] Důležité: nikdy jsme neříkali, že při elementárních úpravách lze vyškrtávat nulové řádky. Vyškrtávat nulové řádky při GEM nebudeme; matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ musí mít stejné rozměry!

Důsledky

1. Pro každou matici **M** platí $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M}^T)$, kde $\mathbf{M}^T$ je transponovaná matice[a] k matici **M**.
2. Hodnost matice **M** je rovna počtu nenulových řádků v horním blokovém tvaru po skončení GEM.
3. Defekt matice **M** je roven počtu sloupců matice **M** mínus hodnost matice **M**.

---

[a] Matice $\mathbf{M}^T$ má jako své sloupce původní řádky matice **M** zapsané ve stejném pořadí. Například pro

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Věta (Frobenius)

1. Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když platí rovnost $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Pokud $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, potom lze říci následující:[a]

   Zvolme jakékoli $\mathbf{p}$, splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
   Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ platí právě tehdy, když $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h$ pro nějaké $\mathbf{x}_h$ z $\ker(\mathbf{A})$.

---

[a] Budeme používat i zkrácený a přehledný zápis: množinu všech řešení lze napsat jako $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})\}$, kde $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.

Důkaz.

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když $\mathbf{b}$ je v $\mathrm{im}(\mathbf{A})$. To nastane právě tehdy, když $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$. Viz str 12, téma 3A.
2. Triviální.

Základní myšlenky řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$

1. $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}\}$ je lineární podprostor prostoru $\mathbb{F}^s$. Tudíž pro vyřešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ stačí najít bázi $\ker(\mathbf{A})$. Tato báze má přesně $\mathrm{def}(\mathbf{A})$ prvků.

   Jakékoli bázi prostoru $\ker(\mathbf{A})$ budeme říkat fundamentální systém soustavy s maticí $\mathbf{A}$.

2. Soustavě $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o})$ budeme říkat homogenní soustava příslušná k matici $\mathbf{A}$.

   Jakékoli řešení homogenní soustavy je tedy lineární kombinací prvků fundamentálního systému.

3. Jakékoli řešení soustavy lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{p} + \mathbf{x}_h$, kde $\mathbf{x}_h$ je v $\ker(\mathbf{A})$ a $\mathbf{p}$ je jakékoli řešení původní soustavy (takzvané partikulární řešení).

Jak vyřešit homogenní soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o})$

1. GEM: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$.
2. Víme: $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}')$ a matice $\mathbf{A}'$ je v horním blokovém tvaru. Tudíž známe defekt matice $\mathbf{A}$: $d = \mathrm{def}(\mathbf{A}) = s - \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = s - \mathrm{rank}(\mathbf{A}')$.
3. Báze prostoru $\ker(\mathbf{A})$ musí mít d prvků. Tudíž d hodnot v každém řešení lze zvolit (jde o posice, na kterých nejsou pivoty matice $\mathbf{A}'$). Touto volbou zajistíme lineární nezávislost. Dalších $s - d$ hodnot lze spočíst z nenulových rovnic v soustavě $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$ zpětným dosazením.

Jak nalézt partikulární řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$

1. GEM: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$.
2. d hodnot v partikulárním řešení lze zvolit (jde o posice, na kterých nejsou pivoty matice $\mathbf{A}'$).
3. Zpětné dopočtení z nenulových rovnic soustavy $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$.

Příklad (ukázka systematického řešení soustavy nad $\mathbb{R}$)

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ (maticově: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$). Pro matici soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ platí rovnosti $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 1$ a $\operatorname{def}(\mathbf{A}) = 2$. Pivot je na první posici: volit budeme vždy druhou a třetí položku, první položku dopočteme.

1. Příslušná homogenní rovnice: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$.

   Fundamentální systém: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Partikulární řešení pro $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Celkové řešení: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Příklad (geometrický význam postupu řešení soustavy)

Rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ v $\mathbb{R}^3$ popisuje rovinu ρ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Tato rovina ρ je v obecné poloze (rovina ρ neprochází počátkem, protože $2 \neq 0$).

1. Homogenní rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$ je paralelní posunutí roviny ρ tak, aby výsledná rovina ρ_h procházela počátkem.

   Fundamentální systém $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ je systém souřadnic v rovině ρ_h.
2. Partikulární řešení rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ je libovolný bod $\mathbf{p}$ v původní rovině ρ.
3. Zápis $\mathbf{p} + \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ obecného řešení vyjadřuje opětovné paralelní posunutí roviny ρ_h zpět do roviny ρ.

Poznámka

Stejnou geometrickou představu je třeba mít pro řešení obecné soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nad $\mathbb{F}$.

Příklad (systematické řešení komplikovanější soustavy nad $\mathbb{R}$)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ -1/2R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 1/2R_3 \\ R_4 - R_3 \end{array}$$

Důležité: povšimněme si značení řádkových úprav; úpravy budeme vždy takto vyznačovat.

Příklad (pokrač.)

Po skončení GEM $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ jsou pivoty na čtvrté, druhé a první posici. Tyto položky v řešení budeme dopočítávat, třetí položku řešení budeme volit.

Řešení je: $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Zkrácený zápis: $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Řešením soustavy je přímka v $\mathbb{R}^4$.

GEM a soustavy lineárních rovnic, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 6 a 7.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Gaussova eliminační metoda (GEM) jako universální a systematická metoda řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Dnešní přednáška

1. Lineární maticové rovnice.
2. Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Příklad

Nalezněte všechny matice $\mathbf{X}$, které splňují rovnost[a] $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$, kde $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je matice rotace o úhel α, $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Rozměrová zkouška: musí platit $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Rešeními jsou například matice $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{O}_{2,2}$ a $\mathbf{R}_\alpha$.

Jak nalézt všechna řešení? Předvedeme universální metodu.

1. Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x_{11} - \sin\alpha \cdot x_{21} & \cos\alpha \cdot x_{12} - \sin\alpha \cdot x_{22} \\ \sin\alpha \cdot x_{11} + \cos\alpha \cdot x_{21} & \sin\alpha \cdot x_{12} + \cos\alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x_{11} + \sin\alpha \cdot x_{12} & -\sin\alpha \cdot x_{11} + \cos\alpha \cdot x_{12} \\ \cos\alpha \cdot x_{21} + \sin\alpha \cdot x_{22} & -\sin\alpha \cdot x_{21} + \cos\alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix}.$$

[a] Geometrický význam: hledáme všechny transformace $\mathbf{X}$ roviny, které jsou záměnné s rotací o úhel α.

Příklad (pokrač.)

2. Rovnost $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{O}_{2,2}$. Stačí tedy vyřešit soustavu čtyř rovnic

$$\begin{array}{rrrrcl} & -\sin\alpha \cdot x_{21} & -\sin\alpha \cdot x_{12} & & = & 0 \\ \sin\alpha \cdot x_{11} & & & -\sin\alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\ \sin\alpha \cdot x_{11} & & & -\sin\alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\ & \sin\alpha \cdot x_{21} & +\sin\alpha \cdot x_{12} & & = & 0 \end{array}$$

V maticovém zápisu (po skončení GEM) máme řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sin\alpha & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

v závislosti na parametru $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Příklad (pokrač.)

3. Pro $\sin\alpha = 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a tudíž řešení je tvaru $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, kde x_{11}, x_{21}, x_{12} a x_{22} jsou libovolná reálná čísla.

Závěr: s rotací o úhel 0 nebo π je záměnná libovolná transformace roviny.

Příklad (pokrač.)

4. Pro $\sin\alpha \neq 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a řešení $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Závěr: s rotací $\mathbf{R}_\alpha$ o úhel $\alpha \notin \{0, \pi\}$ jsou záměnné transformace roviny tvaru $\mathbf{X} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámky

1. Předchozí metoda (rozměrová zkouška pro hledanou matici $\mathbf{X}$ a následné řešení velké soustavy rovnic) je universální metodou pro řešení maticových rovnic, kde neznámá matice $\mathbf{X}$ vystupuje pouze v první mocnině.

   Jak už to u universálních metod bývá: v některých případech je taková metoda zbytečně zdlouhavá.

2. Předvedeme speciální metodu řešení maticových rovnic tvaru[a] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

[a] Protože rovnost $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, získáme tak i metodu pro řešení rovnic tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Musíme ovšem obezřetně zacházet s transposicemi matic.

Převod maticové rovnice na více soustav lineárních rovnic

Maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, a matice $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^r$, převedeme na p soustav

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

kde $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_p)$.

1. Každou takovou soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ vyřešíme předešlými postupy.[a]
2. Řešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ existuje právě tehdy, když každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ má řešení.
3. Pokud má každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ řešení, pak „sesazením“ všech řešení $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_s$ jednotlivých soustav dostaneme řešení původní maticové rovnice: $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \ldots \ \mathbf{x}_p)$.

[a] Jak uvidíme, lze takový systém soustav řešit simultánně.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, máme řešit dvě soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obě soustavy mají stejnou matici soustavy, lze je tedy řešit simultánně:

1. Simultánní GEM:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Podle Frobeniovy věty mají obě soustavy řešení.

Příklad (pokrač.)

2. Zápis $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ kóduje dvě soustavy s řešeními (v pořadí soustav zleva doprava):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix})$$

3. „Sesazení řešení dohromady“: celkové řešení je tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 - 7a & -7b \\ a & b \\ -1 + 5a & 1 + 5b \end{pmatrix}$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámka

Víme, že pro regulární matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jediné řešení, a sice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Toto jediné řešení lze nalézt postupem, kterému se někdy říká Gaussova-Jordanova eliminace: eleminace řádkovými úpravami nekončí po dosažení horní trojúhelníkové matice, ale pokračuje nulováním i nad hlavní diagonálou.

Získáváme tak postup

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Speciálně: pro regulární $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ lze nalézt $\mathbf{A}^{-1}$ postupem

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Více viz cvičení a skripta, Příklad 6.4.12.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Myšlenky postupu:

1. Zadané řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a má „směr" určený vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Tudíž: hledanou soustavu očekáváme ve tvaru $(a_1 \;\, a_2 \;\, a_3 \mid b)$, neboli $a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$.
   Jak najít soustavu $(a_1 \;\, a_2 \;\, a_3 \mid b)$ systematicky?

Příklad, pokrač.

Podle Frobeniovy věty je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

1. Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé; tvoří tudíž fundamentální systém soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde $\operatorname{def}(\mathbf{A}) = 2$ a $\mathbf{A}$ má tři sloupce. To umožní nalézt $\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ a_3)$.
2. Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, neboli $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$. Matici $\mathbf{A}$ známe, můžeme dopočítat $\mathbf{b} = (b)$.

Příklad, pokrač.

3. Nalezení **A**:
   1. Protože má platit $(a_1\ a_2\ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, musí platit $(2\ 0\ 4) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$.
   2. Protože má platit $(a_1\ a_2\ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, musí platit $(1\ 2\ 0) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$

   Tudíž $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ je fundamentální systém soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$, neboli (např.) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A} = (2\ \ -1\ \ -1)$.

Příklad, pokrač.

4. Nalezení $\mathbf{b}$. Protože $\mathbf{A} = (2 \;\; -1 \;\; -1)$ a $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, je $b = -2$.
5. Závěr: hledaná soustava je (například) $(2 \;\; -1 \;\; -1 \mid -2)$.

Poznámky

1. Předchozí příklad nalezl obecnou rovnici roviny z jejího parametrického zadání. Postup využíval platnosti Frobeniovy věty a základních vlastností matic.
2. Očekáváme: podobný postup bude fungovat pro nalezení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad tělesem $\mathbb{F}$, která má řešení

$$\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$$

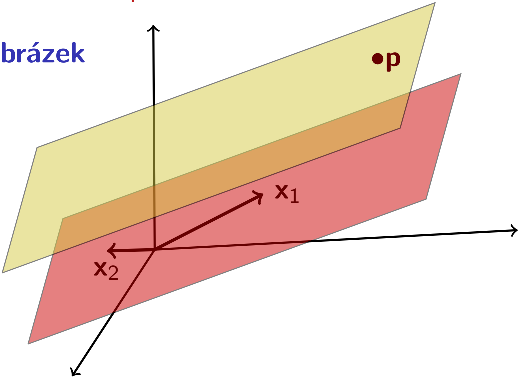
kde vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé.

Definice

Zápisu $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$, kde vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé, říkáme afinní podprostor dimense d v prostoru $\mathbb{F}^s$.[a] Seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ říkáme směr (také: zaměření) tohoto podprostoru.

[a] Také: d-dimensionální plocha v $\mathbb{F}^s$.

Ilustrační obrázek



Tvrzení

Ke každému d-dimensionálnímu afinnímu podprostoru $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$ existuje alespoň jedna soustava tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ jako množinu řešení.

Důkaz.

Podrobně na přednášce; hlavní myšlenky jsou:

1. Musí platit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$ pro $i = 1, \ldots, d$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
2. Označme $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$. Protože seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je lineárně nezávislý, platí $d = \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}^T)$. Soustava[a] $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$ má $s - d$ prvků ve svém fundamentálním systému. Označme tento systém jako $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{s-d})$.
3. Známe $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{s-d})^T$ a dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.

■

[a] Pozor: matici $\mathbf{X}^T$ známe, neznámá je označena jako $\mathbf{a}$.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Platí $3 = \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \mathrm{rank}(\mathbf{X}^T)$.
2. Matice $\mathbf{A}$ má jako řádky fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Protože $\mathrm{rank}(\mathbf{X}^T) = 3$, bude mít matice $\mathbf{A}$ dva lineárně nezávislé řádky.

Příklad (pokrač.)

3. Fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$, neboli homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ je například } \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik:[a] proto je i $4 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

[a] Fundamentální systém tvoří bázi jádra matice soustavy. A nenulové skalární násobky prvků jakékoli báze opět tvoří bázi.

Příklad (pokrač.)

4. Dopočteme **b** z rovnice $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

Tudíž $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Odpověď: 3-dimensionální afinní podprostor v $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

je řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$ nad $\mathbb{R}$.

Závěrečné poznámky

1. GEM je sice universální metodou řešení soustav lineárních rovnic, nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je však numericky nestabilní.

   V praxi je pro řešení (zvláště velkých) soustav lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) nutno použít jiné metody (například iterační Gaussovu-Seidelovu metodu,[a] a jiné). Tyto metody jsou mimo sylabus standardní přednášky z lineární algebry.

2. Jak řešit soustavy s parametrem? GEM je universální metodou! Při řešení soustav s parametrem pomocí GEM musíme být velmi opatrní na provádění elementárních úprav.

   Pro soustavy se čtvercovou maticí vyvineme později další metodu řešení (kombinaci GEM a Cramerovy věty).

3. Nepovinné: Nad $\mathbb{R}$ lze mít i další geometrický pohled na GEM (tzv. Householderovy reflexe).

[a] Viz Poznámku 6.4.7 skript.

Determinant: část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.1 a 8.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. GEM.
2. Regularita a singularita čtvercových matic.

Dnešní přednáška

1. Determinant čtvercové matice: test regularity matice.
   Determinant má ale především geometrický význam.
2. Bude nutné připomenout základní fakta o permutacích.
   Použijeme grafickou notaci pro permutace: strunové diagramy.
3. Základní metody výpočtu determinantu: z definice a pomocí GEM.

Příští přednáška

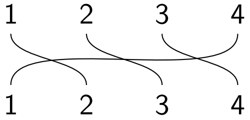
1. Hlubší poznatky o determinantech.
2. Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic.

Definice (permutace)

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je jakákoli bijekce $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Zápisy permutací

1. Výčtem: $\pi : \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 4, \quad 4 \mapsto 1.$
2. Tabulkou:[a] $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
3. Strunovým diagramem:[b]

$\pi =$ 

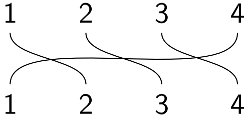
Strunový diagram čteme odshora dolů.

[a] Upozornění: tato tabulka není matice ve smyslu našeho předmětu.
[b] Řešené příklady na strunové diagramy naleznete v kapitole 8.1 skript.

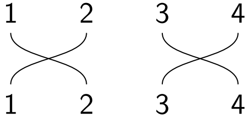
Grafické skládání permutací

Například:

$\pi =$

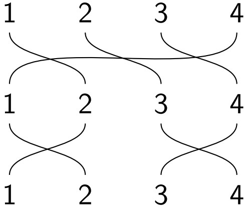


$\sigma =$

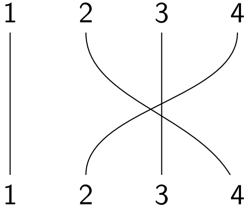


Spočteme nejdříve π a potom σ (směrem shora dolů):

$\sigma \cdot \pi =$



$=$



Definice (symetrická grupa permutací)

Množině všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, spolu s výše uvedenou operací skládání $\cdot$, říkáme symetrická grupa permutací n-prvkové množiny. Značení: S_n.

Tvrzení (vlastnosti skládání permutací)

Skládání $\cdot$ v S_n je asociativní, má neutrální prvek (říkáme mu jednotková (také: triviální) permutace, značíme id_n), každá permutace má inversi vzhledem ke skládání $\cdot$ (značení a terminologie: π^{-1} je inversní permutace k permutaci π).

Důkaz.

Plyne okamžitě z vlastností bijekcí. ∎

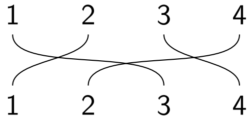
Definice (znaménko permutace)

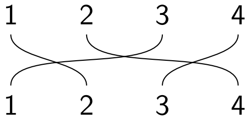
Ať π je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$. Znaménko permutace π je číslo $\operatorname{sign}\pi$, které je definováno takto:

$$\operatorname{sign}\pi = \begin{cases} +1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje sudý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je sudá permutace),} \\ & \\ -1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje lichý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je lichá permutace).} \end{cases}$$

Příklad

Pro permutace

$\pi =$ 

$\pi^{-1} =$ 

platí: $\operatorname{sign}\pi = -1 = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$.

Tvrzení (znaménka speciálních permutací)

1. Pro identickou permutaci id_n v S_n platí $\mathrm{sign}(\mathrm{id}_n) = 1$.
2. Pro libovolné permutace σ a π v S_n platí $\mathrm{sign}(\sigma \cdot \pi) = (\mathrm{sign}\, \sigma) \cdot (\mathrm{sign}\, \pi)$.
3. Ať π je permutace v S_n. Pak platí $\mathrm{sign}\, \pi = \mathrm{sign}(\pi^{-1})$.
4. Ať π je permutace v S_n. Označte jako σ permutaci v S_n vzniklou z π prohozením dvou hodnot. Potom $\mathrm{sign}\, \sigma = -\,\mathrm{sign}\, \pi$.

Důkaz.

Přednáška (strunové diagramy). ∎

Definice (determinant čtvercové matice)

Pro matici **A** typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ definujeme determinant jako skalár

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Často se píše i $|\mathbf{A}|$ místo $\det(\mathbf{A})$.

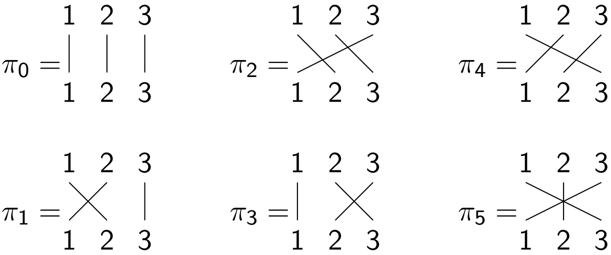
„Šachový význam“ součinu $a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$

1. Ať π je permutace v S_n.
   Pokud na políčka $a_{\pi(1),1}$, $a_{\pi(2),2}$, ..., $a_{\pi(n),n}$ rozestavíme věže, pak se navzájem neohrožují.[a]
2. Obráceně: n navzájem se neohrožujících věží na „šachovnici“ $(a_{i,j})$ určuje permutaci π v S_n a tím i jeden součin $a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$.

[a] Připomenutí: Položka $a_{\pi(j),j}$ matice **A** je položka v j-tém sloupci na $\pi(j)$-tém řádku.

Příklad (Sarrusovo pravidlo pro matice 3×3)

Na množině $\{1, 2, 3\}$ existuje přesně šest následujících permutací:



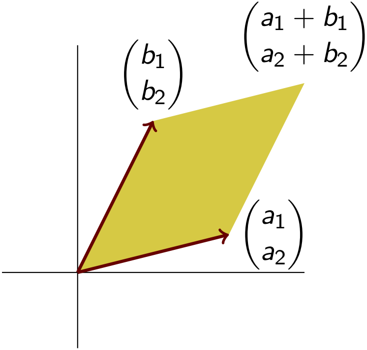
Tudíž:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

$$-a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Geometrický význam determinantu matice 2×2 nad $\mathbb{R}$

Determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ je velikost $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy

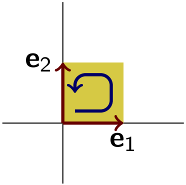


kde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Geometrie determinantu (pokrač.)

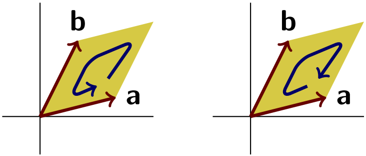
Vlastnosti velikosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy jsou:

1. $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$. Tato rovnost zavádí jednotku plochy a orientaci prostoru $\mathbb{R}^2$: při pohybu kolem počátku jsme zvolili směr proti směru hodinových ručiček — první je vektor $\mathbf{e}_1$, vektor $\mathbf{e}_2$ je druhý.



Geometrie determinantu (pokrač.)

2. $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Tato rovnost vystihuje, jak chápeme orientaci velikosti plochy: změnou pořadí vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ změníme znaménko velikosti plochy.



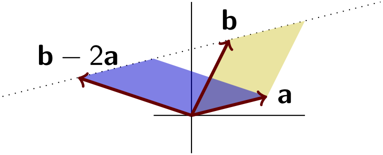
$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad = \quad -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Geometrie determinantu (pokrač.)

3. Výpočet hodnoty $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ je lineární v každé položce, tj. pro libovolná reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ platí rovnosti

$$\begin{aligned} P(a_1 \cdot \mathbf{a}_1 + a_2 \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) &= a_1 \cdot P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + a_2 \cdot P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \\ P(\mathbf{a}, b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + b_2 \cdot \mathbf{b}_2) &= b_1 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + b_2 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2) \end{aligned}$$

Důležitý důsledek: platí rovnosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{a})$ a $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{b})$ pro a, b reálná.
Například:



$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$

Zobecnění (geometrický význam determinantu)

Determinant $\det(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ je velikost $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ orientovaného objemu rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{F}^n$. Rovnoběžnostěn je určen vektory $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ (v tomto pořadí).

Platí:

1. $V(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.
2. $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \operatorname{sign}\pi \cdot V(\mathbf{a}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{\pi(n)})$, kde π je libovolná permutace v S_n.
3. $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je lineární v každé souřadnici zvlášť.

Výše uvedené tři vlastnosti funkce

$$V : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \to \mathbb{F}$$

určují pojem determinantu jednoznačně.

Tvrzení (determinant transponované matice)

Platí: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n} \\
&= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign} \pi^{-1} \cdot a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdot a_{2,\pi^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)} \\
&= \det(\mathbf{A}^T)
\end{aligned}
$$

Využili jsme jednoduchého faktu: platí rovnosti
$\{\pi \mid \pi \in S_n\} = S_n = \{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\}$. ∎

Důsledky (výpočet determinantu a GEM)

1. Prohození dvou řádků mění znaménko determinantu.
2. Vynásobení jednoho řádku nenulovým skalárem a změní determinant a-krát.
3. Přičtení lineární kombinace ostatních řádků k řádku nezmění hodnotu determinantu.

Tvrzení (determinant horní trojúhelníkové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková matice. Potom $\det(\mathbf{A}) =$ součin prvků na hlavní diagonále matice.

Důsledek (opatrný výpočet determinantu pomocí GEM)

$\det(\mathbf{A})$ lze počítat pomocí GEM: je nutné si ovšem poznamenat typy úprav (a tudíž i případné změny hodnoty determinantu).

Příklad (výpočet determinantu pomocí GEM)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix}
&= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -8 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ -2R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \\
&= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 19 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{matrix} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -133 & -28 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -7R_3 \end{matrix} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -123 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 19R_2 \end{matrix} = \\
&= \frac{2 \cdot 7 \cdot (-123)}{2 \cdot 7} = -123
\end{aligned}
$$

Věta (invertibilita matice pomocí determinantu)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí: $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Důsledek 8.4.4 skript). ∎

Poznámky k výpočtu $\det(\mathbf{A})$

1. Výpočet z definice: časově náročný. Je zapotřebí se vyznat v S_n (má $n!$ prvků).
2. Výpočet pomocí GEM: méně náročný (řádově n^3 kroků). Pozor! Nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ je GEM numericky nestabilní. Navíc (při ručním výpočtu) je zapotřebí GEM provádět opatrně.
3. Jiný způsob výpočtu? Ano: rozvoj podle řádku nebo sloupce (rekursivní výpočet). Příště.

Jiný způsob zavedení determinantu (nepovinné)

Determinant lze zavést pomocí vnější mocniny[a] lineárního prostoru, viz kapitolu 5 skript.

Výhody tohoto přístupu:

1. Okamžitý geometrický vhled do pojmu determinant a snadné důkazy vlastností determinantu.
2. Determinant je možno počítat pro libovolná lineární zobrazení, ne jen pro matice.
3. Pojem vnější mocniny vede rychle ke geometrické algebře, která umožňuje elegantní a rychlé výpočty v počítačové grafice, viz například knihu

   L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann, *Geometric algebra for Computer Science*, Elsevier, 2007

[a] Na první pohled myšlenka vnější mocniny vypadá velmi divoce. Tato myšlenka je ale velmi přirozená a je stejně stará jako lineární algebra: v roce 1844 s ní přišel Hermann Grassmann (1808–1887).

Determinant, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.3 a 8.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Definice determinantu čtvercové matice (s použitím permutací).
2. Základní metody výpočtu determinantu:
   1. Z definice: nutnost znalosti S_n.
   2. Pomocí GEM: nutnost opatrného provádění GEM.
3. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dnešní přednáška

1. Věta o rozvoji determinantu podle sloupce.[a]
2. Hlubší poznatky o determinantu.
3. Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic (Cramerova věta). Ukážeme geometrický význam Cramerovy věty.

[a] Víme: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$. Takže determinant půjde rozvíjet i podle řádku.

Připomenutí

Determinant $\det(\mathbf{A})$ čtvercové matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je lineární v každém sloupci. Speciálně: protože $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{e}_i$ (kde $\mathbf{a}_j$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$), platí rovnost:[a]

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}_{\text{Značení: } A_{ij}.}$$

Například (zvolili jsme $j = 2$, tj. rozvíjíme podle druhého sloupce):

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{22}} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{32}}$$

[a] Této rovnosti se říká (Laplaceův) rozvoj determinantu podle j-tého sloupce.

Definice

Determinantu $A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$ říkáme algebraický doplněk posice (i, j) v matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Věta (praktický výpočet algebraického doplňku)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Označme jako $\mathbf{A}_{ij}$ matici typu $(n-1) \times (n-1)$ vzniklou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Potom[a] $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

[a] Pozor: nezapomeňte na znaménko posice (i, j): $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Lemma 8.3.4 ve skriptech). ■

Pozorování

Rozvoj determinantu podle sloupce umožňuje rekursivní výpočet determinantu! Důvod: pro $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ jsou algebraické doplňky jedotlivých posic determinanty matic typu $(n-1) \times (n-1)$.

Příklad (determinant rozvojem podle třetího sloupce)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}
= \underbrace{0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{13}}
+ \underbrace{6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}}
+ \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{33}}
+ \underbrace{5 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{43}}
$$

Poznámky k výpočtu determinantu rozvojem podle sloupce

1. Protože $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$, lze determinant počítat i rozvojem podle řádku.
2. Rekursivní výpočet determinantu (tj. výpočet rozvojem podle sloupce nebo řádku) má složitost $n!$ — je tudíž obecně výpočetně pomalý.
3. Výpočet determinantu rozvojem je vhodný pro řídké matice (matice, obsahující hodně nul).

Definice (adjungovaná matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je její adjungovaná matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$.

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ je $\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Věta (inverse matice pomocí algebraických doplňků)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Potom platí rovnosti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

Pro regulární $\mathbf{A}$ tedy platí $\mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

Důkaz.

1. Každý prvek na hlavní diagonále matice $\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$ má hodnotu $\det(\mathbf{A})$. To plyne z rozvoje determinantu podle sloupce.
2. Každý prvek mimo hlavní diagonálu matice $\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$ má hodnotu 0. To plyne z rozvoje determinantu, aplikovaného na matici se dvěma stejnými řádky.

Tudíž $\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n$. Druhá rovnost se dokáže analogicky. ∎

Příklad (inverse pomocí adjungované matice)

Pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je $\det(\mathbf{A}) = 6$. Víme, že inverse matice $\mathbf{A}$ existuje.

1. Matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$ je $\begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Proto $\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Celkově $\mathbf{A}^{-1} = 6^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Doporučení (sanity check)

Při výpočtu $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ je možná rozumné nejprve spočítat matici algebraických doplňků a potom ji transponovat.

Výhodnost a vhodnost výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$

1. Pro obecné (velké) matice je výpočet nevýhodný. Vyžaduje spočítat velké množství determinantů.
2. Pro velké a řídké matice (tj. pro matice obsahující velké množství nulových položek) může jít o výhodný výpočet.
3. Výpočet je výhodný pro matice typu 2×2.

   Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je regulární (tj., ať $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$).

   Potom
   $$\mathbf{A}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = (ad-bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
4. Poznámka: některé aplikace (například v kryptografii) vyžadují práci s maticemi nad ještě obecnější strukturou než je těleso. Pak je výpočet $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ často jediná možnost.

Věta (základní strukturální vlastnosti determinantu)

Funkce $\det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \ldots \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \to \mathbb{F}$ má následující vlastnosti:

1. $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.
2. $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A})$.
3. Pro regulární $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
4. $\det(a \cdot \mathbf{A}) = a^n \cdot \det(\mathbf{A})$, kde a je libovolný skalár.[a]

[a] Pozor: rovnost $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$ obecně neplatí.

Důkaz.

1. Víme z minulé přednášky.
2. Bez důkazu (viz např. Tvrzení 8.2.19 ve skriptech).
3. Pro regulární $\mathbf{A}$ platí rovnosti
   $1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1})$.
   Takže $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
4. Plyne z toho, že determinant je v každém sloupci lineární.

Definice (soustava se čtvercovou maticí)

Rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, říkáme soustava se čtvercovou maticí.

Tvrzení (řešení čtvercové soustavy s regulární maticí)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou maticí. Tato soustava má jediné řešení právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární matice. V tomto případě je toto jediné řešení tvaru $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Důkaz.

Regularita matice $\mathbf{A}$ znamená přesně to, že $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je isomorfismus. To znamená přesně to, že pro každé $\mathbf{b}$ existuje právě jedno $\mathbf{x}$ takové, že $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$, neboli $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Cramerova věta (také: Cramerovo pravidlo)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou regulární maticí nad $\mathbb{F}$. Potom j-tá položka jediného řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je tvaru

$$x_j = \det(\mathbf{A})^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Důkaz.

Víme: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \det(\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$. Takže

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}$$

Proto $\det(\mathbf{A}) \cdot x_j$ je součin j-tého řádku matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ se sloupcem $\mathbf{b}$.
Ten součin je roven $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$. ∎

Příklad (použití Cramerovy věty)

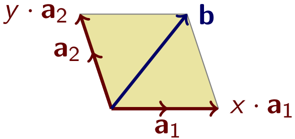
Pro soustavu $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{R}$ platí $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$. Lze tedy použít Cramerovu větu:

1. První položka jediného řešení je: $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{-19}{22}$.
2. Druhá položka jediného řešení je: $\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{15}{22}$.

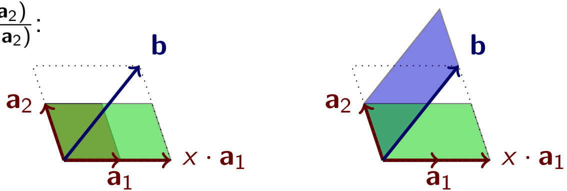
Jediné řešení: $\begin{pmatrix} \dfrac{-19}{22} \\ \\ \dfrac{15}{22} \end{pmatrix}$.

Geometrie Cramerovy věty pro soustavy 2×2 nad $\mathbb{R}$

Pro regulární soustavu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$ platí podle Cramerovy věty $\frac{\det(\mathbf{b},\mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$. Co to opravdu znamená?[a]



Ale $x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$, takže platí $x = \frac{\det(\mathbf{b},\mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}$:



Podobnou úvahu lze provést pro $y = \frac{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}$.

[a] Analogicky lze postupovat pro regulární soustavy větších rozměrů a nad libovolným tělesem (musíme ovšem kreslit rovnoběžnostěny).

Příklad (vyřešte nad $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ je parametr)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -p & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & p & -1 \end{array}\right), \ \det(\mathbf{A}) = (p-2)\cdot(p-17).$$

1. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ právě tehdy, když $p \notin \{2, 17\}$.
   V tomto případě existuje jediné řešení. Toto jediné řešení lze nalézt pomocí GEM nebo pomocí Cramerovy věty.

   Řešení: $$\begin{pmatrix} \dfrac{26}{17-p} \\[2ex] \dfrac{3}{17-p} \\[2ex] \dfrac{1}{17-p} \end{pmatrix}, \ p \notin \{2, 17\}.$$

Příklad (pokrač.)

2. $p = 2$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$.

   Řešení: $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix})$, pro $p = 2$.

3. $p = 17$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -17 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 17 & -1 \end{array}\right)$.

   Řešení pro $p = 17$ neexistuje (Frobeniova věta).

Doporučení

Pro čtvercové soustavy s parametrem doporučujeme použít kombinaci Cramerovy věty a GEM. Výpočet pak má dvě fáze:

1. Cramerova věta pro ty parametry, pro které je matice soustavy regulární.
2. GEM pro ty parametry, pro které je matice soustavy singulární.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí.
2. Matice transformace souřadnic.

Dnešní přednáška

1. Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.
   Zjistíme, pro které vektory $\vec{x}$ platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ (tzv homotetie — to je to nejjednodušší lineární zobrazení z L do L).
2. Budeme se snažit změnit bázi L tak, aby ve směrech vektorů nové báze bylo zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ homotetií (obecně pro každý směr různou). Ne vždy to půjde.

Příští přednáška

1. Diagonalisace matic nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.
2. Dvě aplikace diagonalisace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.[a]

[a] Tyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Příklad (equilibrium stochastických procesů)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezněte alespoň jeden nenulový vektor $\mathbf{q}$ tak, aby platila rovnost[a] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$.

To je snadné: $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože řádkové součty matice $\mathbf{A}$ jsou 1. Tudíž $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[a] Stejnou (ale komplikovaněji zadanou) úlohu řeší algoritmus `PageRank`, viz například K. Bryan a A. Leise, The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581, nebo Dodatek F skript.

Co dělat pro obecnou matici A?

Měli jsme štěstí („hezký“ tvar matice $\mathbf{A}$, takovým maticím se říká řádkově stochastické). Jak ale postupovat pro obecnou matici $\mathbf{A}$?

Příklad (equilibrium stochastických procesů, znovu a jinak)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezneme všechna nenulová řešení všech soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je neznámé.

Přepsáním soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ na $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ zjistíme, co je třeba udělat:

1. Matice $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2$ musí být singulární. Jedině tehdy bude mít rovnice $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ nenulové řešení.

   To jest: hledáme všechna λ taková, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

   To znamená vyřešit rovnici $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

2. Pro konkrétní hodnoty λ nalezneme nenulové řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pomocí GEM.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

$$\det(\mathbf{A}-x\cdot\mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 0.3-x & 0.7 \\ 0.8 & 0.2-x \end{vmatrix} = (0.3-x)\cdot(0.2-x)-0.56 =$$
$$= x^2 - 0.5x - 0.5 = (x-1)\cdot(x+0.5) = 0.$$

Soustava $(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2)\cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pro

1. $x = 1$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & -0.8 & 0 \end{array}\right)$ a řešení[a] $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   To znamená: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

2. $x = -0.5$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 \end{array}\right)$ a řešení[b] $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$.

   To znamená: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = -0.5\cdot\mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$.

---

[a] To jsme již věděli.

[b] To je nová informace.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

Co jsme se vlastně dozvěděli a k čemu je to dobré?

1. V souřadnicovém systému $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$ se matice $\mathbf{A}$ stane diagonální maticí $D(1; -0.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

   Opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1;-0.5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

   tudíž

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1;-0.5)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

2. Díky předchozímu vidíme, že zadáme-li rekurentní proces

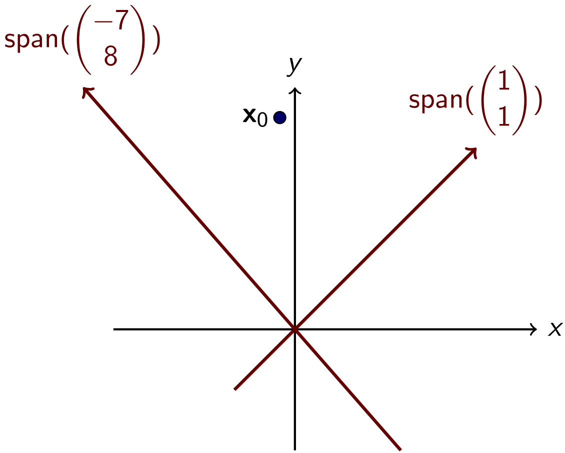
$$\mathbf{x}_0 \text{ libovolný vektor z } \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}, \; k \geq 0,$$

pak se posloupnost vektorů $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ... chová následovně:

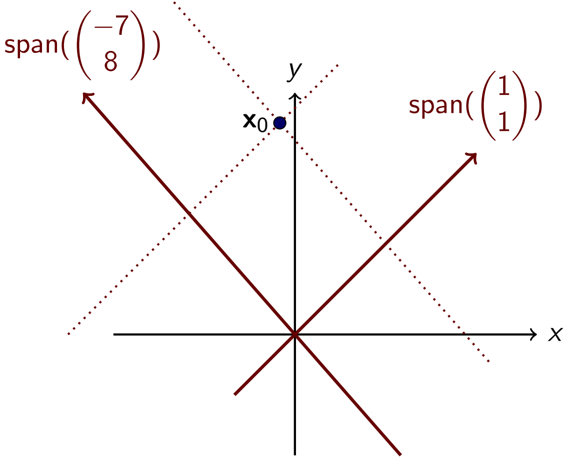
1. Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce span($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \ldots$
2. Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce span($\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$), jde o posloupnost $\mathbf{x}_0$, $-0.5 \cdot \mathbf{x}_0$, $(-0.5)^2 \cdot \mathbf{x}_0$, $(-0.5)^3 \cdot \mathbf{x}_0$, ...
3. Je-li $\mathbf{x}_0 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, tedy jestliže platí rovnost $\mathbf{coord}_B(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{coord}_B(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} a \\ (-0.5)^n \cdot b \end{pmatrix}$.

Diagonalisací matice $\mathbf{A}$ tedy získáváme o rekurentním procesu úplný přehled.

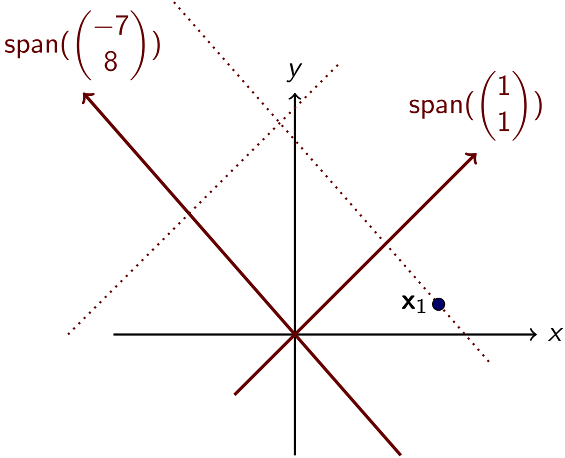
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



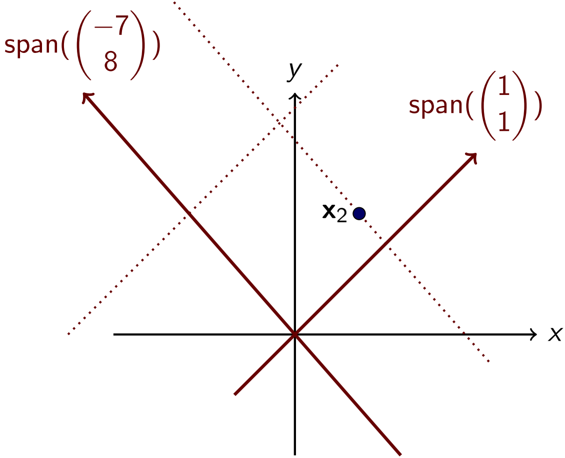
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Shrnutí dosavadních úvah

1. Pokud pro obecnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ najdeme bázi B, ve které $\mathbf{A}$ je diagonální maticí, získáme v nové bázi úplný přehled o maticích tvaru $\mathbf{A}^k$, kde $k \geq 0$.

   To je důležité například v následujících oblastech:

   1. Teorie dynamických systémů.
   2. Ekonomie (například tzv. Leontiefův input-output model).
   3. Složitost rekursivních algoritmů (řešení rekurentních rovnic, viz příští přednášku).
   4. Geometrie kvadratických útvarů, viz kapitolu 14.1 skript.
   5. Funkce matic, viz příští přednášku.
   6. Atd.

   Hledání diagonální matice k matici $\mathbf{A}$ se říká diagonalisace matice $\mathbf{A}$. Ne vždy zadanou matici diagonalisovat půjde.

2. Problém diagonalisace lze zformulovat (a řešit) pro obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.

Definice

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ je λ v $\mathbb{F}$ vlastní hodnotou (také: vlastním číslem), pokud existuje nenulový vektor $\vec{x}$, splňující rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.
Každému takovému nenulovému vektoru $\vec{x}$ říkáme vlastní vektor příslušný hodnotě λ.

Pozorování

Ať $\mathbf{f} : L \to L$ je lineární zobrazení.

1. Pro libovolné λ v $\mathbb{F}$ platí: $\{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\} = \ker(\mathbf{f} - \lambda \cdot \mathbf{id})$. Tudíž vlastní vektory příslušné hodnotě λ tvoří podprostor L.[a]
2. λ je vlastní hodnota $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$ je netriviální prostor.

[a] Říkáme mu vlastní podprostor příslušný λ, značíme jej $\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$. Důvod: vlastní hodnotě se říká eigenvalue, vlastnímu vektoru eigenvector, vlastnímu podprostoru eigenspace. Německy: eigen=vlastní.

Připomenutí (základní vlastnosti podobnosti matic)

Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si podobné (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Podobné matice jsou maticemi stejného lineárního zobrazení, ale vzhledem k jiné bázi.

Platí:

1. $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$.
2. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
3. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$, potom $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$.

Definice (charakteristický polynom čtvercové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Výrazu $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)$ říkáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ (značení: $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$).

Poznámky (pro matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$)

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je polynom stupně n. Tudíž má v $\mathbb{F}$ nanejvýš n kořenů (i s násobnostmi). Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ nemá polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ v $\mathbb{R}$ žádný kořen.
2. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x)$.[a]
   Důvod:

$$\det(\mathbf{B} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}x\mathbf{T}) =$$
$$\det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{T}) =$$
$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n).$$

[a] Pozor: obrácená implikace neplatí, viz dále.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f}: L \to L$ je lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. Označme jako $\mathbf{A_f}$ matici $\mathbf{f}$ vzhledem k jakékoli bázi prostoru L. Potom λ v $\mathbb{F}$ je vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\det(\mathbf{A_f} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$.

Důkaz.

Protože L má dimensi n, je λ vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\operatorname{def}(\mathbf{f} - \lambda \mathbf{id}) > 0$. To nastane právě tehdy, když matice $\mathbf{A_f} - \lambda \mathbf{E}_n$ je singulární. ∎

Poznámka

Předchozí tvrzení nezávisí na volbě báze prostoru L a tím pádem nezávisí na volbě matice $\mathbf{A_f}$.
Připomenutí: změnou báze změníme matici $\mathbf{A_f}$ na matici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Příklad (matice mohou mít stejné vlastní hodnoty, ale různé vlastní podprostory)

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad $\mathbb{R}$.

Potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

1. Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:
$$\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$
2. Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:
$$\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Příklad (pokrač.)

Pozor! Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ je $\mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$. Ale $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.

Tedy: **A** a **B** mají stejná vlastní čísla (i s násobnostmi), ale různé vlastní podprostory.

Problém diagonalisace

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ chceme rozhodnout, zda $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$ je diagonální matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nebo ve sloupcovém zápisu

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2, \lambda_3 \cdot \mathbf{e}_3, \ldots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n)$$

Myšlenka nalezení matic $\mathbf{T}$ a $\mathbf{D}$ v rovnici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}$

Ať $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$.

1. Rovnost $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D}$ platí právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ a matice $\mathbf{T}$ je regulární.
2. Pro regulární matici $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ právě tehdy, když platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$.

Shrnuto: rovnost $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ platí právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$.
  To jest: j-tý sloupec $\mathbf{t}_j$ matice $\mathbf{T}$ je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_j matice $\mathbf{A}$.
- Matice $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ je regulární.

Pozorování

Dva vlastní vektory, příslušející dvěma různým vlastním hodnotám, jsou lineárně nezávislé.

Platí-li

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_1} = \lambda_{j_1} \cdot \mathbf{t}_{j_1} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{t}_{j_2}$$

pak z rovnosti $a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \mathbf{o}$ plyne

$$\begin{aligned}
\mathbf{o} &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{o} \\
&= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot (a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2}) \\
&= a_1 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_1}}_{\neq \mathbf{o}} + a_2 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_2}}_{= \mathbf{o}}
\end{aligned}$$

tedy $a_1 = 0$.

Rovnost $a_2 = 0$ se dokáže analogicky.

Problém

Existuje dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů pro stejnou vlastní hodnotu?

Věta (charakterisace diagonalisovatelných matic nad $\mathbb{F}$)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{A}$ je diagonalisovatelná, tj $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
2. Charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze v $\mathbb{F}$ rozložit na součin lineárních faktorů a platí: násobnost λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.[a]

[a] Násobnosti λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ se někdy říká algebraická násobnost λ, číslu $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$ se někdy říká geometrická násobnost λ.

Důkaz.

Bez důkazu (nemáme vybudovanou teorii polynomů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$). Pro zájemce: Věta 10.4.8 skript. ∎

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ splňují:

1. $\operatorname{char}_{\mathbf{A}}(x) = \operatorname{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.
2. Protože $\dim(\operatorname{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2$ a $\dim(\operatorname{eigen}(2, \mathbf{A})) = 1$, platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
3. Protože $\dim(\operatorname{eigen}(3, \mathbf{B})) = 1$ a $\dim(\operatorname{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$, neplatí $\mathbf{B} \approx \mathbf{D}$ pro žádnou diagonální matici $\mathbf{D}$.

Ukázali jsme (mimo jiné): $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$, přestože $\operatorname{char}_{\mathbf{A}}(x) = \operatorname{char}_{\mathbf{B}}(x)$.

Příklad

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ platí $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$

a $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{A}$ v kanonické bázi odpovídá lineárnímu zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y + 2z \\ -x + 4y - z \\ -4x + 4y - z \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ jde o podstatně jednodušší zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Diagonalisace matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Pojmy vlastní hodnota a vlastní vektor lineárního zobrazení.
2. Věta o diagonalisovatelnosti čtvercových matic nad $\mathbb{C}$.

Dnešní přednáška

1. Diagonalisovatelnost matic nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.
2. Dvě aplikace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.[a]

---

[a] Tyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Připomenutí důležité vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$

Každý polynom $p(x)$ v $\mathbb{C}[x]$ stupně n má přesně n kořenů (počítaných i s násobnostmi).[a]

[a] Této vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$ se říká algebraická uzavřenost.

1. Komplexní číslo λ je kořen polynomu $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ násobnosti k, pokud platí rovnost $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$ pro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $q(\lambda) \neq 0$.
2. Speciálně: číslo λ má jako kořen $p(x)$ násobnost nula právě tehdy, když λ není kořenem polynomu $p(x)$.

Důsledek (téma 8A, tvar věty o diagonalisaci pro $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Matice $\mathbf{A}$ diagonalisovatelná.
2. Pro každé komplexní číslo λ platí: násobnost λ jako kořene polynomu $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.

Příklad

Pauliho matice[a] jsou následující tři matice nad $\mathbb{C}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všechny tyto matice jsou diagonalisovatelné:

1. Matice Z již diagonální je.

[a] Jde o důležitý příklad v kvantové mechanice a kvantovém počítání. Matice X, Y a Z jsou operátory spinu ve směrech os x, y, z a značívají se též

$$\sigma_x \text{ (také: } \sigma_1) \qquad \sigma_y \text{ (také: } \sigma_2) \qquad \sigma_z \text{ (také: } \sigma_3)$$

Užitečná početní cvičení: platí rovnosti

1. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbf{E}_2$.
2. $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{E}_2$, kde $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j$ je tzv Poissonova závorka a δ_{jk} je Kroneckerův symbol.
3. $[\sigma_j, \sigma_k] = \sum_{l=1}^{3} 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$, kde $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j$ je tzv komutátor a ϵ_{jkl} je Levi-Civitův symbol.

Příklad (pokrač.)

2. Diagonalisace matice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Platí $\mathrm{char}_X(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$.

   Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice X jsou: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Tudíž
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   a operátor X je diagonální v bázi $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$.

Příklad (pokrač.)

3. Diagonalisace matice $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

   Platí $\mathrm{char}_Y(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$.

   Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice Y jsou: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Tudíž
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   a operátor Y je diagonální v bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Jordanův tvar čtvercové matice

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ taková, že polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze rozložit na součin lineárních faktorů.[a]
Potom lze dokázat, že $\mathbf{A}$ je „téměř diagonalisovatelná“. Přesněji: platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

O Jordanově tvaru budeme mluvit na příští přednášce (téma 9A).

[a] To platí například pro libovolnou matici nad $\mathbb{C}$.

Jordanův tvar čtvercové matice (pokrač.)

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Matici $\mathbf{J}_i$ říkáme Jordanova buňka. Na diagonále je vlastní hodnota λ_i matice $\mathbf{A}$. Rozměr matice $\mathbf{J}_i$ je roven násobnosti vlastní hodnoty λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$.

Existenci Jordanova tvaru budou věnovány další přednášky.

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ je regulární matice nad $\mathbb{R}$. Potom platí:

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = (a-x)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.
   Diskriminant tohoto výrazu je $-4b^2$.

   Matice $\mathbf{A}$ je tedy nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná pouze v případě $b = 0$.

   V tomto případě ale $\mathbf{A}$ už je diagonální: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a musí platit $a \neq 0$, protože $\mathbf{A}$ je regulární.

   Matice $\mathbf{A}$ je tedy maticí změny měřítka (změna je stejná na obou souřadnicových osách).

Příklad (pokrač.)

2. V případě $b \neq 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ není nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná.

   Matice $\mathbf{A}$ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) má vlastní hodnoty $\lambda_1 = a + bi$ a $\lambda_2 = a - bi$, protože $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$.

   Označme $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále označme jako α úhel[a] mezi vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   Potom
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
   To jest: $\mathbf{A}$ je rotace o úhel α, následovaná změnou měřítka.

---

[a] Úhlu α se říká argument komplexního čísla $a + bi$. Platí tedy rovnost $a + bi = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$.

Tvrzení (klasifikace regulárních transformací roviny)

Ať $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je regulární a ať nemá 2-násobnou vlastní hodnotu. Pak $\mathbf{M}$ je podobná buď

1. matici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \neq b$ jsou z $\mathbb{R}$ a $a \cdot b \neq 0$,

nebo

2. matici $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, kde $r > 0$ a $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Slogan

Regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou pouze dvou typů:

1. Změny měřítka (změna měřítka je na každé souřadnicové ose jiná).
2. Rotace následované změnou měřítka stejnou na obou souřadnicových osách.

Důkaz (klasifikace regulárních transformací roviny).

1. V případě, kdy $\mathbf{M}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$, má $\mathbf{M}$ dvě různé reálné vlastní hodnoty a, b. Tudíž $\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \cdot b \neq 0$, protože $\mathbf{M}$ je regulární.
2. V případě, kdy $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná není, má $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ komplexní kořen $\lambda = a + bi$, kde $b \neq 0$. Označme jako $\mathbf{v}$ komplexní vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ. Označme jako $\mathbf{T}$ matici se sloupci $\mathbf{t}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{v})$ (vektor reálných částí položek vektoru $\mathbf{v}$) a $\mathbf{t}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{v})$ (vektor imaginárních částí položek vektoru $\mathbf{v}$).

   Potom platí rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$.

   Nyní stačí použít předchozí příklad. ■

Výpočet mocnin diagonalisovatelné matice

Pro diagonalisovatelnou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí:
$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Tudíž: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}$.

Obecně: $\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{T}$, pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$.

Protože mocniny diagonální matice lze počítat velmi rychle, lze rychle počítat i mocniny diagonalisovatelných matic.

Ukážeme dvě aplikace umocňování:

1. Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic.
   To je důležité při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
2. Základní myšlenku funkcí matice.
   To je důležité ve fyzice, grafice, kvantovém počítání, ...

Příklad (Fibonacciho posloupnost)

Hledáme posloupnost čísel $F(n)$, splňující lineární rekurentní rovnici $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, pro všechna př. č. $n \geq 0$.

Cíl: chceme explicitní vzorec pro $F(n)$, $n \geq 0$.

Evidentně: známe-li $F(0)$ a $F(1)$, známe všechna $F(n)$.[a]

1. Vytvoříme generující matici $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pro kterou platí:

   $$\mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}, \text{ obecně } \mathbf{F}^n \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$

2. Matice $\mathbf{F}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

   $$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

---

[a] Požadavkům $F(0) = x_0$ a $F(1) = x_1$ se říká počáteční podmínka. Pro klasickou Fibonacciho posloupnost jde o $F(0) = 1$, $F(1) = 1$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost, pokrač.)

3. $$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix}$$

Takže: $F(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(0) + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(1)$

V klasickém případě (tj když $F(0) = F(1) = 1$), je

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Poznámky (lineární homogenní rekurence k-tého řádu)

Obdobným způsobem lze řešit jakoukoli homogenní lineární rekurentní rovnici k-tého řádu: hledáme posloupnost $X(n)$ prvků $\mathbb{F}$, které splňují

$$X(n+k) = a_1 X(n+k-1) + a_2 X(n+k-2) + \dots a_k X(n)$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 0$, kde $a_1, \dots, a_k$ jsou v $\mathbb{F}$.

Jediné, co potřebujeme, je diagonalisovatelnost generující matice.

1. Řešení rekurentních rovnic hraje zásadní úlohu při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
2. Podobné postupy fungují i pro lineární homogenní diferenciální rovnice k-tého řádu. Viz Dodatek O skript.

Příklad (exponenciála matice)

Víme, že funkce e^x má Taylorův rozvoj $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pro čtvercovou diagonalisovatelnou matici $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ definujeme

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}}{n!} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \right)}_{=e^{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{T}$$

Konvergenci této řady musíme chápat ve smyslu normy.[a]

Lze ukázat, že matice $e^{\mathbf{D}}$ je diagonální, a že platí $e^{\mathbf{D}} = (\delta_{ij} \cdot e^{d_{ij}})$.

[a] To je velmi technický pojem, nebudeme o něm mluvit. Více například v knize Roger A. Horn, Charles J. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, nebo v přednášce A0B01PAN (Pokročilá analýza), nebo v kapitole 13.2 skript. Analogicky exponenciále lze postupovat pro obecnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (případně $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), která má Taylorův rozvoj.

Jordanův tvar

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 11.1 a 11.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí lze (za určitých předpokladů) diagonalisovat.
2. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí diagonalisovat nelze.

Dnešní přednáška

1. Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.
   Vysvětlíme, co je Jordanův tvar zobrazení $\mathbf{f}$.[a]
   Půjde o tvar: $\mathbf{f}$ = diagonální + nilpotentní.
   Nilpotentní = „téměř nulové zobrazení“.
   To znamená: Jordanův tvar = „téměř diagonální tvar“.

---

[a] Jde o velmi technickou partii lineární algebry. Některé důkazy tudíž neuvedeme. Důkazy všech tvrzení naleznete v Kapitole 11 skript.
Zkouška: výpočet Jordanova tvaru nebude v písemné části (mohou tam ale být nilpotentní matice), u ústní části mohou být vyžadovány pouze hlavní myšlenky Jordanova tvaru (viz str 9 tohoto tématu).

Příklad (direktní rozklad rotace v rovině xy)

Pro

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

je

1. $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \vee \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cap \mathrm{span}(\mathbf{e}_3) = \{\mathbf{o}\}$. Tento fakt budeme značit $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \oplus \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a budeme mluvit o direktním rozkladu $\mathbb{R}^3$ na $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$.
2. Direktně rozložit lze i celé lineární zobrazení:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \oplus (1)$$
protože podprostory $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ jsou invariantní na dané zobrazení.

Příklad (diagonalisovatelná matice a direktní rozklad)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je diagonalisovatelná matice:
$D(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T} = ({}_1, \ldots, {}_n)$.
Potom pro $W_i = \mathrm{span}({}_i)$ platí:

1.
   1. $\mathbb{F}^n = W_1 \vee \ldots \vee W_n$,
   2. $W_i \cap \bigvee\limits_{j \neq i} W_j = \{\mathbf{o}\}$ pro všechna i.

   Tato dvě fakta budeme značit $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ a budeme říkat, že $W_1, \ldots, W_n$ tvoří direktní rozklad prostoru $\mathbb{F}^n$.
2. Pro každé $\mathbf{x}$ z W_i je $\mathbf{Ax}$ opět z W_i. To jest: každé W_i je $\mathbf{A}$-invariantní podprostor prostoru $\mathbb{F}^n$.
   Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_n$.

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad $\mathbb{R}$.

Potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

1. Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:

   $$\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

2. Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:

   $$\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Platí $\mathbb{R}^3 = \mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) \oplus \mathrm{eigen}(2, \mathbf{A})$ a $\mathbf{A} \approx \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (2)$.

Příklad (diagonalisovatelná matice a direktní rozklad, pokrač)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je diagonalisovatelná matice:
$D(\lambda_1; \ldots ; \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T} = ({}_1, \ldots, {}_n)$.

Direktní rozklad lze zlepšit: pokud
$\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$, potom

$$\mathbb{F}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_p, \quad \mathbf{A} \approx \mathbf{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{B}_p$$

To jest: $\mathbf{A}$-invariantní podprostory V_i můžeme zvolit tak, že $\dim(V_i) = m_i$.

Poznámka

Kdy $\mathbf{A}$ diagonalisovat nelze? Když $\dim(V_i) < m_i$ pro alespoň jedno i. Budeme muset vylepšit pojem invariantního podprostoru.

Příklad (neexistence direktního rozkladu pro nediagonalisovatelnou matici)

Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je $\mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

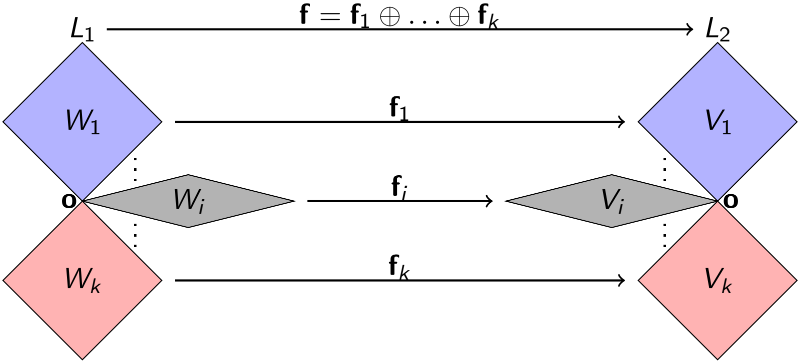
Ale $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.

To znamená:

1. Prostory $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})$ jsou $\mathbf{B}$-invariantní.
2. $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) \oplus \mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})$.
   Prostor $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})$ vlastních vektorů příslušných hodnotě 3 má malou dimensi.

Direktní rozklad lineárního prostoru a lineárního zobrazení

Pro $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, kde $L_1 = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, $L_2 = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a $\mathbf{f}(\vec{x})$ je z V_i, jakmile $\vec{x}$ je z W_i, píšeme



To znamená: $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) + \ldots + \mathbf{f}_k(\vec{x}_k)$, kde $\vec{x} = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_k$.

Cíl této přednášky (hlavní myšlenky Jordanova tvaru)

1. Pro lineární zobrazení $\mathbf{f}$ chceme psát $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$, kde
   1. $\mathbf{f}_{\mathrm{diag}}$ je diagonalisovatelné.
   2. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$ se „příliš neliší" od nulového zobrazení $\mathbf{o}$. Přesněji: $(\mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^k = \mathbf{o}$ pro nějaké k.
   3. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$.

   Tomuto součtu budeme říkat Jordanův tvar $\mathbf{f}$.

   K čemu je to dobré? Budeme moci počítat mocniny[a]

$$\mathbf{f}^m = (\mathbf{f}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^m = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\mathrm{diag}})^j}_{\text{snadné}} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^{m-j}}_{=\mathbf{o} \text{ pro } m-j \geq k}$$

2. Namísto Jordanova tvaru lineárního zobrazení hledáme většinou Jordanův tvar jeho matice.
   V určité bázi (které se říká Jordanova báze) bude tedy matice mít „příjemný tvar".

[a] To je v nejrůznějších aplikacích velmi důležité.

Cíl této přednášky (pokrač.)

3. Většinu výsledků nedokážeme, pouze uvedeme příklady.

   Navíc: nenaučíme se hledat Jordanovu bázi. Je to velmi technické, více se lze dočíst v Kapitole 11 skript.

Značení

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ značíme $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}$ a $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^k$ pro $k \geq 0$.

Definice (nilpotentní zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, pro které existuje k tak, že $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$, říkáme nilpotentní. Nejmenšímu takovému k říkáme index nilpotence a značíme jej $\mathrm{nil}(\mathbf{f})$.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, platí $\mathrm{nil}(\mathbf{N}) = 3$.
Pojďme „stopovat“ cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{o}$$

Všechny čtyři bázové vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice $\mathbf{N}$ je nilpotentní. Navíc $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj. $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je nilpotentní: její řetězce jsou

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & & & \\ \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & \\ \mathbf{e}_3 & \mapsto & 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} \end{array}$$

a proto platí $\operatorname{nil}(\mathbf{N}) = 3$.

Definice

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme Jordanova buňka.[a]

[a] Buňka v této definici má rozměry $n \times n$.

Pozorování

Každá Jordanova buňka je nilpotentní matice. Index nilpotence je roven rozměrům buňky.

Nalezení Jordanova tvaru matice M : $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

1. Spočteme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice **M**.
   1. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ nelze v $\mathbb{F}[x]$ rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice **M** neexistuje.
   2. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice **M** existuje a my postupujeme podle dalších bodů.
2. Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Segment $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
3. Nalezení i-tého segmentu $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$:
   1. Utvoříme nilpotentní matici $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$. a nalezneme její Jordanův tvar $\mathbf{N}_i$.
   2. Platí $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$.
4. Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice **M** jakožto blokově diagonální matici.

Praktický význam Jordanova tvaru matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, pak platí

$$\mathbf{M} \approx \mathbf{M}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{M}_{\mathrm{nil}}$$

kde $\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}$ je diagonální, $\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}$ je nilpotentní a platí rovnost

$$\mathbf{M}_{\mathrm{diag}} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{nil}} = \mathbf{M}_{\mathrm{nil}} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{diag}}$$

To je velmi důležitý výsledek v aplikacích!

Příklad

Připomenutí: pro čtvercovou matici $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) lze definovat

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!}$$

a výsledkem je opět čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$).
Navíc: pro funkci $t \mapsto \exp(t\mathbf{X})$ reálné proměnné platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \exp(t\mathbf{X})$$

a to umožňuje elegantně řešit soustavy lineárních diferencálních prvního řádu s konstantními koeficienty, viz Dodatek O skript.
Matici $\exp(t\mathbf{X})$ lze snadno spočítat, známe-li Jordanův tvar matice $\mathbf{X}$.

Příklad

Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ nalezneme její Jordanův tvar.

1. Platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x-2)^4(x+1)^2$.
   Jordanův tvar $\mathbf{M}$ bude mít dva Jordanovy segmenty:
   1. Segment $\mathbf{B}_1(2)$ velikosti 4×4, protože násobnost 2 jako kořene charakteristické rovnice je 4.
   2. Segment $\mathbf{B}_2(-1)$ velikosti 2×2, protože násobnost -1 jako kořene charakteristické rovnice je 2.

Příklad (pokrač.)

2. Celkově: Jordanův tvar matice **M** je

$$\mathbf{M} \approx B_1(2) \oplus B_2(-1) = \left(\begin{array}{ccc|c||cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cline{5-6} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Příklad (pokrač.)

Například: víme, že platí

$$t\mathbf{M} \approx t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}}$$

pro každé t z $\mathbb{R}$.

Příklad (pokrač.)

To znamená, že[a]

$$\exp(t\mathbf{M}) \approx \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}} + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}})$$

$$= \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot (\mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

---

[a] Exponenciála diagonální matice se počítá snadno. Exponenciála nilpotentní matice se počítá v konečně krocích. V našem případě platí $\mathrm{nil}(\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = 3$, proto $\exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2$.

Abstraktní skalární součin

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1 a 12.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

1. V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.[a]
2. Skalární součin zavedeme axiomaticky. Odvodíme geometrický význam skalárního součinu.[b]

   Axiomatické zavedení skalárního součinu nám umožní převést známé významy z $\mathbb{R}^n$ (kolmost, délka vektoru, atd) do obecných lineárních prostorů se skalárním součinem.

[a] Velmi málo řekneme i o lineárních prostorech nad $\mathbb{C}$. Důvod: fyzika a kvantové počítání.

[b] Slogan: skalární součin je míra „odchylky“ dvou vektorů.

Příští přednáška

1. Popis obecných skalárních součinů v prostorech $\mathbb{R}^n$.

Definice (reálný skalární součin)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci $\langle - \mid - \rangle : L \times L \to \mathbb{R}$ říkáme skalární součin,[a] pokud platí následující, pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$:

1. Komutativita: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle$.
2. Linearita ve druhé souřadnici: zobrazení $\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \to \mathbb{R}$ je lineární.
3. Positivní definitnost: $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqslant 0$, $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.

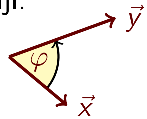
[a] Naše značení pro skalární součin je obvyklé ve fyzice (tzv bra-ket notation nebo Diracova notace) a má jisté výhody. Značení $\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro skalární součin nebudeme používat! Důvod: přetížení značky $\cdot$ pro součin.

Poznámka (skalární součin pro prostory nad $\mathbb{C}$)

V případě lineárního prostoru nad $\mathbb{C}$ mluvíme o skalárním součinu, pokud $\langle - \mid - \rangle : L \times L \to \mathbb{C}$ je positivně definitní, lineární ve druhé souřadnici a místo komutativity platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle}$.

Příklady skalárních součinů

1. Skalární součin v prostoru orientovaných úseček: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$, kde $\|\vec{x}\|$ a $\|\vec{y}\|$ jsou délky úseček $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a φ je úhel, který svírají:[a]



Tento skalární součin splňuje všechny tři požadované vlastnosti: je komutativní, lineární ve druhé souřadnici a positivně definitní.

---

[a] Důležitá poznámka: v další části přednášky ukážeme, že pro libovolný skalární součin je možné definovat pojmy délky $\|\vec{x}\|$ vektoru $\vec{x}$ (také: normy vektoru $\vec{x}$) a úhlu φ mezi dvěma vektory tak, že platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$.

V prostoru s obecným skalárním součinem se tudíž budeme moci „chovat stejně“ jako v klasické geometrii. Bude tak například platit Pythagorova věta, a podobně.

Příklady skalárních součinů (pokrač.)

2. Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$.
3. Standardní skalární součin není jediný skalární součin v $\mathbb{R}^n$. Například[a] $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$ je skalární součin v $\mathbb{R}^2$. (Jde o úmorné, ale užitečné cvičení.)
4. Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i$.

   Pozor! Platí rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle}$, nikoli $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle$.

---

[a] K tomuto skalárnímu součinu se vrátíme koncem této přednášky. Po příští přednášce budeme schopni (téměř) okamžitě uvidět, že jde o skalární součin. Budeme také schopni popsat všechny možné skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení (nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)

Platí $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$.

Důkaz.

Platí $0 \leqslant \langle \vec{x} + a\vec{y} \mid \vec{x} + a\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}_{C} + a \underbrace{2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}_{B} + a^2 \underbrace{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}_{A}$, pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Tudíž $B^2 - 4AC \leqslant 0$, neboli $B^2 \leqslant 4AC$. Z toho nerovnost $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$ plyne okamžitě. ■

Jednoduchý, ale důležitý důsledek: úhel mezi vektory

Pro nenulové $\vec{x}$, $\vec{y}$ platí $-1 \leqslant \underbrace{\dfrac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}}}_{= \cos\varphi \text{ pro jediné } \varphi \in [0; \pi]} \leqslant 1$. Úhlu φ říkáme úhel mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Definice (norma vektoru)

Normu vektoru $\vec{x}$ definujeme[a] jako $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$.

[a] Nerovnost C-S-B tedy můžeme zapsat jako $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Tvrzení (vlastnosti normy)

Platí:

1. $\|\vec{x}\| \geqslant 0$, $\|\vec{x}\| = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.
2. $\|a \cdot \vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$.
3. Trojúhelníková nerovnost: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Důkaz.

Jediná netriviální vlastnost je trojúhelníková nerovnost. Upravujte: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$ a použijte nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski:
$\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$.
Celkově: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leqslant (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$, tedy $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ■

Důsledek

Pro nenulová $\vec{x}$, $\vec{y}$ platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$.

Poznámka

Předchozí důsledek je stejná rovnost, která platí pro „klasický“ skalární součin v prostoru orientovaných úseček!

Definice (ortogonalita vektorů)

Pokud $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$, mluvíme o ortogonálních (také: navzájem kolmých) vektorech.

Několik poznámek o ortogonalitě

1. Neřekli jsme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou na sebe kolmé, pokud svírají úhel $\frac{\pi}{2}$. Taková úvaha platí pouze pro nenulové vektory. Chceme ovšem hovořit i o nulovém vektoru, proto jsme definovali kolmost rovností $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

2. Pozor: nulový vektor $\vec{o}$ je kolmý na každý vektor $\vec{x}$.
   Důvod: z definice skalárního součinu víme, že zobrazení

   $$\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \to \mathbb{R}$$

   je lineární. Proto $\langle \vec{x} \mid - \rangle$ musí poslat nulový vektor na nulový vektor, neboli musí platit rovnost

   $$\langle \vec{x} \mid \vec{o} \rangle = 0$$

   Obráceně: jestliže $\vec{x}$ je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.
   Důvod: podle předpokladu je $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$. Z definice skalárního součinu plyne, že $\vec{x} = \vec{o}$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

3. Chceme-li pro nějaký vektor $\vec{x}$ ověřit, že $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$ pro každý vektor $\vec{v}$ ze $\mathrm{span}(M)$, stačí ověřit, že platí $\langle \vec{x} \mid \vec{m} \rangle = 0$ pro všechny vektory $\vec{m}$ z M.

   Důvod: pro obecný vektor $\vec{v}$ ze $\mathrm{span}(M)$ nastane jedna ze dvou situací:

   1. $\vec{v} = \vec{o}$. Pak $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$.
   2. $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{m}_i$ pro nějaká a_i z $\mathbb{R}$ a nějaká $\vec{m}_i$ z M. Pak
   $$\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{x} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{m}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{m}_i \rangle$$

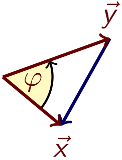
      Jestliže tedy je $\langle \vec{x} \mid \vec{m}_i \rangle = 0$ pro každé i, platí $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$.

   Slogan: ortogonalitu stačí ověřovat pouze pro množinu generátorů podprostoru.

Ortogonalitou se budeme podrobněji zabývat v příštích přednáškách.

Příklady (geometrie prostoru se skalárním součinem)

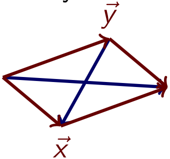
1. Kosinová věta: Nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují trojúhelník



Platí: $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \underbrace{2\cdot\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle}_{2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\cos\varphi}$.

Případu, kdy $\langle\vec{x}\mid\vec{y}\rangle = 0$, se říká Pythagorova věta.

2. Rovnoběžníková rovnost: Dva nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují strany rovnoběžníka s úhlopříčkami $\vec{x}-\vec{y}$ a $\vec{x}+\vec{y}$.



Platí: $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$.

Upravujte:
$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}-\vec{y}\mid\vec{x}-\vec{y}\rangle + \langle\vec{x}+\vec{y}\mid\vec{x}+\vec{y}\rangle = \dots$

Poznámky (vztah skalárního součinu, normy a metriky)

Skalární součin indukuje normu a ta indukuje metriku (také: distanci) na množině L. Jde o funkci $d : L \times L \to \mathbb{R}$, která splňuje:

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geqslant 0$, rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{y}$.
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Stačí definovat $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

O prostoru L s metrikou d mluvíme jako o metrickém lineárním prostoru.

Pro lineární prostory platí:[a] skalární součin $\rightsquigarrow$ norma $\rightsquigarrow$ metrika.

---

[a]Obrácené implikace neplatí. Například $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \neq y, \\ 0, & \text{když } x = y, \end{cases}$ je metrika na $\mathbb{R}$, která nevznikla z žádné normy na $\mathbb{R}$ (tj $\|x\| = d(0, x)$ není norma). Norma $\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \| = |x_1| + |x_2|$ na $\mathbb{R}^2$ nevznikla z žádného skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$, protože nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost.

Poznámka

Předchozí úvahy říkají, že prostory se skalárním součinem se chovají tak, jak jsme zvyklí z klasické geometrie. Další příklad ukazuje, že klasická geometrie nemusí být vždy vhodná.

Příklad (nikoli positivně definitní „skalární součin“)

Na $\mathbb{R}^4$ definujte $\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = tt' - xx' - yy' - zz'$. Protože $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$, nejde o positivně definitní „skalární součin“.

Tento „skalární součin“ je velmi důležitý v teorii relativity. Příslušnému pojmu „vzdálenosti“ vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^4$ se říká Lorentzova metrika Minkowského časoprostoru.[a]

[a] V tomto časoprostoru je rychlost světla c rovna 1.

Příklad (Lorentzova transformace)

Pohyb podsvětelnou rychlostí v ve směru osy x v Minkowského časoprostoru je lineární zobrazení $\mathbf{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, pro které platí

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \cdot (t - vx) \\ x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{kde } 0 \leqslant v < c = 1 \text{ a } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^4$ má zobrazení $\mathbf{L}$ matici

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -v \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -v \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\varphi = \ln(\gamma(1 + v))$. Pohyb ve směru osy x podsvětelnou rychlostí v v Minkowského časoprostoru lze tedy interpretovat jako rotaci (v rovině dané osami t a x) o úhel φ v hyperbolické geometrii.

Příklad (rotace a standardní skalární součin)

Připomenutí: rotace o úhel α je $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde[a]

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí: $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}\|$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}\|$.

Ukázali jsme: rotace zachovává standardní skalární součin, normu a metriku.

[a] Povšimněme si: $\mathbf{R}_\alpha^T = \mathbf{R}_\alpha^{-1}$.

Tvrzení

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{A}$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathbf{A}$ je regulární a platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz.

Z (1) plyne (2):[a] $\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$, takže $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.
Ze (2) plyne (1):
$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$. ■

[a] Připomenutí: pro Kroneckerův symbol δ platí $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ii} = 1$.

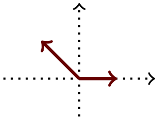
Poznámka (základní transformace prostoru $\mathbb{R}^2$)

Projekce na osy a změna měřítka nezachovávají standardní skalární součin! Rotace skalární součin zachovávají (viz předchozí příklad). Reflexe podle os x a y standardní skalární součin zachovávají.

Příklad (netradiční skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$ v $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

To znamená, že náš skalární součin „vidí" vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jako navzájem kolmé:



To může být velmi praktické. Jak tedy rozpoznat obecný skalární součin? Všimněme si, že náš součin je zadán jistou maticí **G**:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2$$

Co dál?

Budeme chtít pochopit, které matice $\mathbf{G}$ zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Uvidíme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ přesně odpovídají maticím, kterým říkáme positivně definitní.

Charakterisace skalárních součinů v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1, 12.2 a 12.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

1. V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.
2. Charakterisace matic, které zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.
3. Konstrukce skalárních součinů požadovaných vlastností.

Příští přednášky ke skalárnímu součinu

1. Ortogonální báze a ortonormální báze.
2. Ortogonalisační proces a ortonormalisační proces.
3. Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Připomenutí (dva různé skalární součiny v $\mathbb{R}^2$)

1. Standardní skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2. „Nezvyklý“ skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

V obou případech je součin zadán jistou maticí typu 2×2. Je to náhoda?

Co dál?

Ukážeme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ odpovídají přesně těm čtvercovým maticím, kterým říkáme positivně definitní.

Definice (positivně definitní matice)

Řekneme, že matice $\mathbf{G}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je positivně definitní, když existuje matice $\mathbf{R}$ s lineárně nezávislými sloupci tak, že $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

Poznámky

1. Protože $\mathbf{G}^T = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{G}$, je každá positivně definitní matice $\mathbf{G}$ symetrická.

Poznámky (pokrač.)

2. Positivně definitní matice **G** zobecňují kladná reálná čísla: matice **R** je „druhá odmocnina“[a] matice **G**.

   Opravdu: Matice $\mathbf{G} = (g)$ typu 1×1 je positivně definitní právě tehdy, když $g > 0$.

   1. Ať $\mathbf{G} = (g) = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$. Pak $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ a platí $g = r_1^2 + \cdots + r_n^2$.

      Protože jediný sloupec **R** musí být lineárně nezávislý, je $g > 0$.
   2. Je-li $g > 0$, platí $(g) = (\sqrt{g})^T \cdot (\sqrt{g})$. Protože $\sqrt{g} > 0$, je jediný sloupec matice $\mathbf{R} = (\sqrt{g})$ lineárně nezávislý. Matice **G** je tudíž positivně definitní.

---

[a] Jde jen o slogan: matice **R** není určena jednoznačně. Například platí
$$(4) = (2)^T \cdot (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Věta (charakterisace positivně definitních matic)

Pro matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n}$ nad $\mathbb{R}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{G}$ je positivně definitní.
2. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a determinanty všech matic $\mathbf{G}_k = (g_{ij})_{i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,k}$, kde $1 \leqslant k \leqslant n$, jsou kladné.[a]
3. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a nerovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geqslant 0$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$ (rovnost platí pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
4. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a $\operatorname{char}_{\mathbf{G}}(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné.
5. Existuje regulární matice $\mathbf{R}$ tak, že platí $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

[a] Tento test positivní definitnosti budete využívat v analýze pro určování lokálních minim funkcí více proměnných.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký, pro zájemce: Tvrzení 12.3.4 skript). ∎

Poznámka o Choleskyho faktorisaci — nepovinné

1. Připomenutí definice: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ má lineárně nezávislé sloupce.
2. Předchozí věta: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je regulární.
3. Zesílení věty: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je regulární v horním blokovém tvaru.

Rovnosti $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ pro regulární matici $\mathbf{R}$ v horním blokovém tvaru se říká Choleskyho faktorisace matice $\mathbf{G}$. Příklad Choleskyho faktorisace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 12 \\ 8 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Choleskyho faktorisaci lze nalézt algoritmem, viz skripta, Příklad 12.3.6. Tento algoritmus je nepovinný.

Příklady

1. Protože $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T \cdot \mathbf{E}_n$, je jednotková matice $\mathbf{E}_n$ positivně definitní.

   Připomeňme: $\mathbf{E}_n$ zadává standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^n$.

2. Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ je positivně definitní podle předchozí věty: $\mathbf{G}$ je symetrická a platí nerovnosti $\det(\mathbf{G}_1) = \det(1) > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) > 0$.

   Připomeňme: $\mathbf{G}$ zadává „nezvyklý“ skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Příklady (pokrač.)

3. Matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

není positivně definitní podle předchozí věty: platí
$\det(\mathbf{G}_1) > 0$, $\det(\mathbf{G}_2) < 0$, $\det(\mathbf{G}_3) > 0$, $\det(\mathbf{G}_4) < 0$.

Připomeňme (minulá přednáška): $\mathbf{G}$ zadává „skalární součin"
$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v Minkowského časoprostoru $\mathbb{R}^4$.

Věta (obecný tvar skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$)

1. Ať $\mathbf{G}$ je positivně definitní matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. Potom maticový součin

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

definuje skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

2. Každý skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ definuje positivně definitní[a] matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n}$, kde $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle$. Potom platí rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

[a] Matici $\mathbf{G}$ říkáme metrický tensor (také: Gramova matice) skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Příklad (popis všech skalárních součinů v $\mathbb{R}^2$)

Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je positivně definitní právě tehdy, když platí:

1. $\mathbf{G}$ je symetrická matice, tj. když platí $c = b$.
2. $\det(\mathbf{G}_1) = a > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) = ad - b^2 > 0$.

To znamená: výraz

$$ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + dx_2y_2$$

zadává skalární součin $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí nerovnosti $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

Příklad (jednotková kružnice pro skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro positivně definitní[a] matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ a příslušný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ je množina[b]

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \| = 1 \right\}$$

jednotková kružnice. Rovnice této kružnice je

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2 = 1$$

a my ukážeme, že v bázi vlastních vektorů matice $\mathbf{G}$, jde o elipsu.

[a] Připomenutí: platí $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

[b] Připomenutí: $\| - \|$ je norma vytvořená skalárním součinem $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

1. Positivně definitní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{G}}(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - b^2)$ s diskriminantem $D = (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0$.
2. V případě $D = (a-d)^2 + 4b^2 = 0$ platí $b = 0$ a $a = d > 0$.

   Pak matice $\mathbf{G}$ je diagonální, vlastní vektory jsou $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

3. V případě $D = (a-d)^2 + 4b^2 > 0$ rozlišíme dva případy:
   1. $b = 0$. Pak $\mathbf{G}$ je diagonální a $a \neq d$. Vlastní vektory $\mathbf{G}$ jsou $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar
   $$\left(\frac{x_1}{\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{ad}}\right)^2$$
   protože $d > 0$, neboť $\mathbf{G}$ je positivně definitní. Jde tedy o elipsu.
   2. $b \neq 0$. Matice $\mathbf{G}$ pak má dvě různé kladné vlastní hodnoty
   $$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{D}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{D}}{2}$$
   V bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vlastních vektorů má rovnice jednotkové kružnice tvar
   $$\left(\frac{t_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}\right)^2$$
   Jde tedy o elipsu.

Připomenutí

Minulá přednáška: každý skalární součin vytváří normu.
Je-li $\langle - \mid - \rangle$ skalární součin na $\mathbb{R}^n$, pak

1. vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou ortogonální (také: navzájem kolmé), pokud $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0$,
2. norma (také: velikost) vektoru $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$,
3. vektor $\mathbf{x}$ je normovaný, pokud $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Tvrzení (kanonická báze $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$)

Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ a kanonickou bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{R}^n$ platí:[a] $\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases}$.

[a] Takovým bázím budeme říkat ortonormální a obecně je budeme studovat příště. To jest: vektory takové báze jsou na sebe navzájem kolmé a každý vektor takové báze má normu 1.

Věta (každou bázi $\mathbb{R}^n$ lze považovat za ortonormální)

Ať $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze $\mathbb{R}^n$. Potom existuje jediný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ takový, že $\langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Důkaz.

Označme $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, připomenutí (téma 5B):
$\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, čili $\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, pro vš $i = 1, \dots, n$.

1. Existence hledaného skalárního součinu.
   Definujte $\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_n \mapsto B}$. Potom matice $\mathbf{G}$ je positivně definitní a platí

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle &= \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j \\
&= \underbrace{\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T}_{=(\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i)^T = \mathbf{e}_i^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_j}_{=\mathbf{e}_j} \\
&= \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

Důkaz (pokrač.)

2. Jednoznačnost hledaného skalárního součinu.
   Ať $\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. Ukážeme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

   Opravdu: platí $\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{b}_j = 0$ pro vš. i, j.

   To znamená $(\mathbf{T}_{B\mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i)^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot (\mathbf{T}_{B\mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ pro vš. i, j, neboli $\mathbf{e}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{B\mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro vš. i, j.

   Ukázali jsme rovnost $(\mathbf{T}_{B\mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n} = \mathbf{O}_{n,n}$.

   Protože $\mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ i $(\mathbf{T}_{B\mapsto K_n})^T$ jsou regulární, platí $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = \mathbf{O}_{n,n}$.

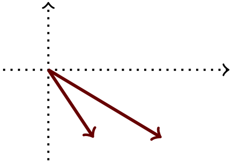
   Tudíž $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

■

Příklad

Najděte skalární součin v $\mathbb{R}^2$ takový, aby vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ byly navzájem kolmé a každý měl normu 1.

Obrázek:



Skalární součin nalezneme podle předchozího tvrzení:

1. Pro $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ je[a] $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   Tudíž $\mathbf{G} = ((\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1})^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 29 \end{pmatrix}$.

[a] Inversi matice $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ nalezneme nejrychleji pomocí adjungované matice.

Příklad (pokrač.)

2. Hledaný skalární součin je
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2.$$

3. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 0.$$

4. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 2 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

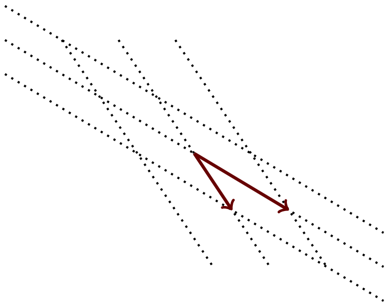
5. $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 5 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

K čemu jsou takové výpočty dobré?

Skalární součin

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2$$

z předchozího příkladu „vidí“



jako jednotkovou pravoúhlou síť.

Co zatím v $\mathbb{R}^n$ umíme

Pro zadanou bázi $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ umíme sestrojit skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je ortonormální báze vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$.

Příště se v $\mathbb{R}^n$ naučíme

Pro zadanou bázi $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a zadaný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ nalezneme novou bázi $(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$, která je ortonormální vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$.

Hledaná báze bude navíc splňovat rovnost $\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$.

K tomu bude zapotřebí zavedení nových pojmů: ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Ortogonalisace a ortogonální projekce

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Definice skalárního součinu v lineárních prostorech nad $\mathbb{R}$.
2. Úplný popis skalárních součinů v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Dnešní přednáška

1. V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.
2. Ortogonální báze a ortonormální báze.
3. Ortogonální projekce. Ortogonalisace a ortonormalisace.

Důležitá aplikace — viz příští přednášku

1. Metoda nejmenších čtverců.

Připomenutí vlastností ortogonality (minulé přednášky)

Platí-li $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$, říkáme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou ortogonální (také: navzájem kolmé).

1. Pozor: nulový vektor $\vec{o}$ je kolmý na každý vektor $\vec{x}$.
   Obráceně: jestliže $\vec{x}$ je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.
2. Abychom ukázali, že rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{v} \rangle = 0$ platí pro každý vektor $\vec{v}$ ze $\mathrm{span}(M)$, stačí ukázat, že všechny vektory $\vec{m}$ z M platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{m} \rangle = 0$.

   Speciální případ výše uvedeného je:[a]

   Ať $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ je báze lineárního podprostoru W lineárního prostoru L. Jestliže platí $\langle \vec{x} \mid \vec{b}_i \rangle = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$, potom platí $\langle \vec{x} \mid \vec{w} \rangle = 0$ pro všechny vektory $\vec{w}$ z W.

[a] Tento speciální případ několikrát (bez dalších komentářů) v dnešní přednášce použijeme.

Tvrzení (lineární nezávislost ortogonální množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina nenulových vektorů s vlastností $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$ pro jakékoli různé vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z M.[a] Pak M je lineárně nezávislá množina.

[a] Takové množině říkáme ortogonální množina.

Důkaz.

Ať $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je jakákoli konečná podmnožina M. Ať $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$. Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$0 = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{o} \rangle = \langle \vec{x}_{i_0} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_i \rangle = a_{i_0} \cdot \langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle.$$

Protože $\vec{x}_{i_0} \neq \vec{o}$, platí $\langle \vec{x}_{i_0} \mid \vec{x}_{i_0} \rangle \neq 0$. Proto $a_{i_0} = 0$. ■

Několik sloganů

1. Jestliže $\dim(L) = n$, potom každá ortogonální množina v L má nejvýše n prvků.

   Slogan: v prostoru dimense n může existovat maximálně n navzájem na sebe kolmých nenulových vektorů.

2. Ortogonální množině v L, která tvoří bázi L, říkáme ortogonální báze.

   Slogan:[a] ortogonální báze je pravoúhlý souřadnicový systém.

3. Každou bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ lze normalisovat: v bázi $\left(\frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}, \dots, \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|}\right)$ mají všechny vektory normu 1.

   Slogan: normální báze má jednotkové úseky na jednotlivých souřadnicových osách.

[a] Pozor: jde jen o slogan. Víme, že například leckterý skalární součin v rovině může jako ortogonální vidět vektory, které „ve skutečnosti“ nesvírají pravý úhel.

Definice (ortonormální báze, čili normální a ortogonální báze)

Bázi $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem, která splňuje rovnost $\langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$,[a] říkáme ortonormální.

[a] Kroneckerův symbol δ splňuje: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Poznámky

1. Kanonická báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
2. Pro jakoukoli bázi $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje jednoznačně určený skalární součin, ve kterém je tato báze ortonormální (viz minulou přednášku).

   Stejnou větu lze dokázat pro obecné prostory nad $\mathbb{R}$ konečné dimense. To dokazovat nebudeme.
3. Ortonormální báze jsou důležité: umožňují „zpříjemnit“ řadu výpočtů. Viz dále.

Tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Pak $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$, čili $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n \mid \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$.

Důkaz.

Definujeme: $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$. Musíme ukázat: $\vec{y} = \vec{x}$.

Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} \mid \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle.$$

Takže $\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$, pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.
Kdyby $\vec{x} - \vec{y} \neq \vec{o}$, byla by $(n+1)$-prvková množina nenulových vektorů $\{\vec{x} - \vec{y}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ lineárně nezávislá.
To není možné: proto je $\vec{y} = \vec{x}$. ∎

Důsledek (skalární součin v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je ortonomální báze prostoru se skalárním součinem. Pak platí:[a] $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle$.

[a] Podle předchozího to znamená: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$, kde $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{coord}_B(\vec{y}) = \mathbf{y}$. Slogan: skalární součin v ortonormální bázi se počítá jako standardní skalární součin souřadnic.

Důkaz.

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i \mid \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}_j \mid \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_j \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j \mid \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_j \mid \vec{y} \rangle \cdot \delta_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle.$$

∎

Poznámka pro ty, kteří chtějí vidět souvislosti (nepovinné)

Předchozí dvě tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi a výpočet skalárního součinu v ortonormální bázi) jsou pouhou instancí toho, že pro ortonormální bázi $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ prostoru L tvoří seznam

$$B^* = (\langle \vec{b}_1 \mid - \rangle, \ldots, \langle \vec{b}_n \mid - \rangle)$$

bázi duálního prostoru L^*, která je duální bází k bázi B.

Více se lze dozvědět v kapitole 3.5 skript.

Zde se objevují výhody Diracovy (také: bra-ket) notace pro skalární součin. Ve fyzice se vektor $\vec{x}$ často píše jako $|\vec{x}\rangle$ (čteme: ket $\vec{x}$). Příslušný kovektor se píše jako $\langle \vec{x}|$ (čteme: bra $\vec{x}$). Skalární součin $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ je pak aplikací kovektoru $\langle \vec{x}|$ na vektor $|\vec{y}\rangle$. Tudíž $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ je bra-ket[a] $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

[a] Samozřejmě: bra-ket je jazyková hříčka, správně by mělo být bracket.

Další důsledek (úhly vektoru se souřadnicovými osami)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Ať vektor $\vec{x}$ je nenulový. Potom pro úhel φ_{i_0}, který vektor $\vec{x}$ svírá se souřadnicovou osou $\vec{b}_{i_0}$, platí rovnost[a]

$\cos\varphi_{i_0} = \dfrac{\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|}$. Navíc platí $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos^2\varphi_i = 1$.

---

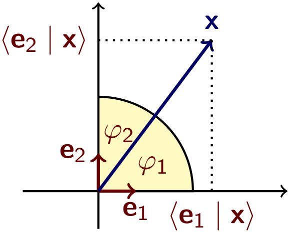
[a] Všimněme si: tvrdíme, že $\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x}\rangle$, tj. i_0-tá souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi B, se počítá jako součin $\|\vec{x}\| \cdot \cos\varphi_{i_0}$. To je zobecnění známého faktu z elementární geometrie roviny (viz další stranu).

Důkaz.

Protože $\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x}\rangle = \underbrace{\|\vec{b}_{i_0}\|}_{=1} \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos\varphi_{i_0}$, platí $\cos\varphi_{i_0} = \dfrac{\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|}$.

Dále: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos^2\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{b}_i \mid \vec{x}\rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x}\rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2} = 1.$ ∎

Předchozí tvrzení v rovině s ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$



$$\cos\varphi_1 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_2 \mid \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$\varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, čili $\cos\varphi_2 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \sin\varphi_1$

Tudíž $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 = 1$.

Ortogonální projekce na přímku a ortogonální rejekce přímkou

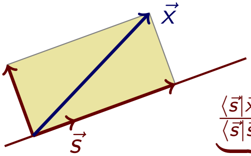
Ať $\vec{s} \neq \vec{o}$ je vektor v prostoru L se skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$.
Potom pro každý vektor $\vec{x}$ platí:

1. Vektor $\frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ zjevně leží na přímce $\mathrm{span}(\vec{s})$.
2. Vektor $\vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ je kolmý na přímku $\vec{s}$, protože platí
$$\langle \vec{s} \mid \vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s} \rangle = \langle \vec{s} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{s} \mid \vec{x} \rangle \cdot \underbrace{\frac{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}}_{=1} = 0$$

Dostáváme tedy ortogonální rozklad[a] vektoru $\vec{x}$:

$$\underbrace{\vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}}$$

ortogonální rejekce přímkou $\mathrm{span}(\vec{s})$



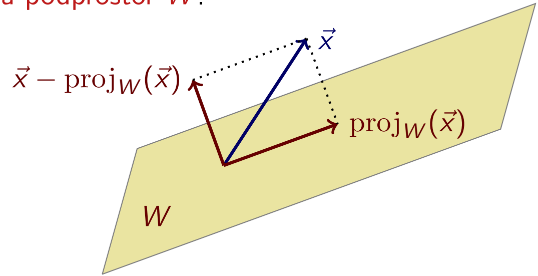
$$\underbrace{\frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}}$$

ortogonální projekce na přímku $\mathrm{span}(\vec{s})$

[a] Slovník: projekce=promítnutí, rejekce=odmítnutí.

Zobecnění: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

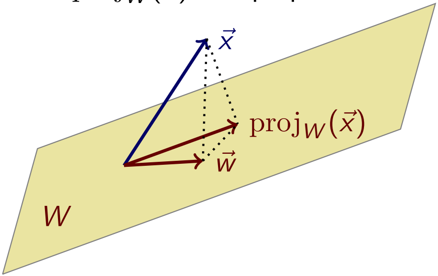
Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať $\vec{x}$ je libovolný vektor v L.
Vektoru $\mathrm{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W, říkáme ortogonální projekce vektoru $\vec{x}$ na podprostor W.



Vektoru $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ budeme říkat ortogonální rejekce vektoru $\vec{x}$ podprostorem W a budeme jej značit $\mathrm{rej}_W(\vec{x})$.

Ortogonální rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor $\vec{x}$, který neleží ve W, a pro jakýkoli vektor $\vec{w}$, který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy pro všechny vektory $\vec{w}$ z W platí[a]

$$\|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2 + \underbrace{\|\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x}-\vec{w}\|^2$$

[a] Na této nerovnosti je založena metoda nejmenších čtverců, viz téma 11A.

Věta (ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází)
Ať $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ je konečná neprázdná ortogonální množina vektorů. Označme $W = \mathsf{span}(M)$. Pro libovolný vektor $\vec{x}$ je

$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\vec{u}_i)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_i \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i \mid \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$

ortogonální projekce vektoru $\vec{x}$ na podprostor W.

Důkaz.
Evidentně: $\mathrm{proj}_W(\vec{x})$ leží ve W.
Pro každé $i_0 = 1, \ldots, k$ platí $\langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x}) \rangle = 0$, protože:

$$\langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} \mid \mathrm{proj}_W(\vec{x}) \rangle =$$

$$\langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} \mid \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_i \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i \mid \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i \rangle =$$

$$\langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle \vec{u}_i \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i \mid \vec{u}_i \rangle} \cdot \langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{u}_i \rangle = \langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt)

Každou bázi $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem lze převést na bázi $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ s následujícími vlastnostmi:

1. C je ortogonální, tj $\langle \vec{c}_i \mid \vec{c}_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$.
2. Pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\operatorname{span}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\} = \operatorname{span}\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k\}$.

Důkaz.

Definujeme[a]

$$\vec{c}_1 := \vec{b}_1, \quad \vec{c}_{k+1} := \underbrace{\mathrm{rej}_{\operatorname{span}\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_k\}}(\vec{b}_{k+1})}_{\text{rejekce vektoru } \vec{b}_{k+1} \text{ podprostorem } \operatorname{span}\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_k\}}$$

Díky definici je splněno $\operatorname{span}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\} = \operatorname{span}\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k\}$, pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$.

První podmínka je splněna z definice ortogonální rejekce. ∎

[a] Slogan: Gram-Schmidt je posloupnost postupných ortogonálních rejekcí.

Poznámka (ortonormalisační proces)

Pokud je $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ ortogonální báze[a] prostoru L, je seznam $(\frac{\vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|}, \ldots, \frac{\vec{c}_n}{\|\vec{c}_n\|})$ ortonormální báze prostoru L (tj je ortogonální a norma každého prvku je 1):

$$\langle \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|} \mid \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|} \rangle = \frac{1}{\|\vec{c}_i\| \cdot \|\vec{c}_j\|} \cdot \langle \vec{c}_i \mid \vec{c}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Každou konečnou bázi B v prostoru se skalárním součinem tedy lze ortonormalisovat:

1. Nejprve provedeme Gram-Schmidtův ortogonalisační proces na bázi B. Dostaneme ortogonální bázi C.
2. Ortogonální bázi C znormalisujeme výše uvedeným postupem.

[a] Evidentně pro každé i platí $\|\vec{c}_i\| \neq 0$, protože C je báze.

Příklad (ortogonalisace vektorů — Gram-Schmidt)

Vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^4$. Příslušnou bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ podprostoru W dimense 3 označíme B.

Báze B není ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^4$. Bázi B nyní ortogonalisujeme. Výsledné vektory v nové (ortogonální) bázi označíme $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$. Budeme postupovat Gram-Schmidtovou metodou.

1. První vektor: $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (pokrač.)

2. Druhý vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_2 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik: protože skalární násobek nemění ortogonalitu,

položíme $\mathbf{c}_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Tím se zbavíme pozdějších nepříjemných výpočtů se zlomky.

Příklad (pokrač.)

3. Třetí vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_3 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Opět se zbavíme zlomků: $\mathbf{c}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Výpočet je u konce: seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ je hledaná ortogonální báze.

Příklad (normalisace ortogonální báze)

Normalisace ortogonální báze $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ podprostoru W v prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem je tvořena vektory

$$\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matice ortogonální projekce a metoda nejmenších čtverců

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 a Dodatku C skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt).
2. Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.
3. Ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází.

Dnešní přednáška

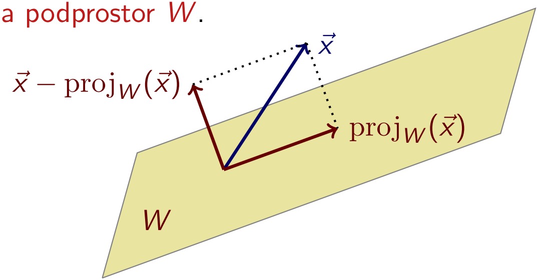
V této přednášce se zaměříme pouze na lineární prostory $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.

1. Výpočet matice ortogonální projekce na podprostor (s libovolnou bází) v $\mathbb{R}^n$.
2. Charakterisace matic ortogonálních projekcí v $\mathbb{R}^n$.
3. Aplikace projekcí na řešení soustav lineárních rovnic (metoda nejmenších čtverců).[a]

[a] Budeme se věnovat pouze nejjednodušší formě metody nejmenších čtverců v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Vše je podrobně popsáno v tomto výtahu z přednášky.

Připomenutí: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať $\vec{x}$ je libovolný vektor v L.
Vektoru $\mathrm{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W, říkáme ortogonální projekce vektoru $\vec{x}$ na podprostor W.

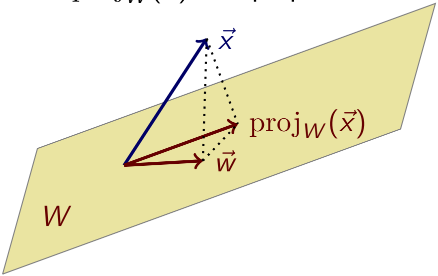


Vektoru $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ říkáme ortogonální rejekce vektoru $\vec{x}$ podprostorem W a značíme jej $\mathrm{rej}_W(\vec{x})$.[a]

[a]Slovník: projekce=promítnutí, rejekce=odmítnutí.

Ortogonální rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor $\vec{x}$, který neleží ve W, a pro jakýkoli vektor $\vec{w}$, který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy pro všechny vektory $\vec{w}$ z W platí[a]

$$\|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2+\underbrace{\|\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x}-\vec{w}\|^2$$

[a] Na této nerovnosti je založena metoda nejmenších čtverců, viz cvičení a druhá část této přednášky.

Projekce na podprostor, u kterého neznáme ortogonální bázi

1. V obecném případě je vždy možno nejprve obecnou bázi ortogonalisovat (Gram-Schmidt) a poté použít vzorec pro projekci na podprostor s ortogonální bází.
2. V případě $\mathbb{R}^n$ lze využít znalosti metrického tensoru, viz níže.

Tvrzení

Ať W je podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem zadaným metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Ať vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ tvoří jakoukoli bázi podprostoru W. Označme jako $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ příslušnou matici. Potom[a]

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

[a] Tento divoký vzorec má krotkou podobu pro standardní skalární součin: platí $\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$, protože $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním[a] skalárním součinem nalezněte matici projekce na rovinu $W = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$. Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{A}^T$ matice ortogonální projekce na W.

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix}-20\\4\\6\end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-20\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-8\\6\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-14)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

[a] Metrický tensor tedy je $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$.

Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem s metrickým tensorem[a] $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ spočtěte matici projekce na přímku $W = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$ matice ortogonální projekce.

Tudíž je

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot ((1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})^{-1} (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{26}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[a] Jde o nestandardní skalární součin: to znamená, že jde o ortogonální projekci vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

Věta (charakterisace matic ortogonálních projekcí)

Ať $\mathbb{R}^n$ je vybaven skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$ s metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Pro matici $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní:

1. $\mathbf{P}$ je matice ortogonální projekce na podprostor $\mathrm{im}(P)$ dimense k.
2. $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámka

Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ (tj. pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$) lze druhou podmínku přeformulovat takto:

2. $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Úvaha o bodech na přímce

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ leží na přímce tvaru $y = ax + b$ právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$ má řešení $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Důležité pozorování: protože $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel, má matice výše uvedené soustavy hodnost 2.

Úvaha o bodech na přímce (pokrač.)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel. Co dělat, když body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ na přímce tvaru $y = ax + b$ neleží?

Lze nalézt přímku tvaru $y = ax + b$, která je (pro zadané body) nejlepší možnou volbou?[a]

Důležité pozorování: soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

řešení mít nemůže, hodnost matice soustavy je ale stále 2.

[a] Zatím nevíme, co myslíme slovem nejlepší. Pravděpodobně chceme minimalisovat chybu, které se dopustíme.

Příklad

Tři body $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ na přímce neleží.[a]

Označme soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$ jako $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Víme:

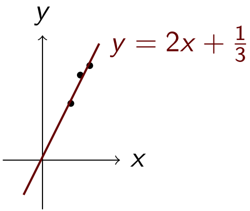
1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nemá řešení, tj. vektor $\mathbf{b}$ neleží v prostoru $W = \mathrm{im}(\mathbf{A})$.
2. Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří bázi prostoru W.
3. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má právě jedno řešení, protože $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je positivně definitní (tudíž regulární). Označme toto řešení $\widehat{\mathbf{x}}$. Platí tedy $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$.
4. Matice $\mathbf{P}_W$ ortogonální projekce na W je tvaru $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$. Tudíž $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$.
5. Takže: $\|\mathrm{rej}_W(\mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$ pro vš $\mathbf{x}$. To je ono: minimalisovali jsme čtverec chyby $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|$.

[a] Body na první pohled „téměř“ leží na přímce $y = 2x$.

Příklad (pokrač.)

Vyřešíme tedy soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$ metodou nejmenších čtverců.[a]

1. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 50 & 12 & 104 \\ 12 & 3 & 25 \end{array}\right)$ a má jediné řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.
2. Hledaná přímka má tvar $y = 2x + \frac{1}{3}$.



[a] Řešením získáme „nejlepší možnou" přímku, kterou lze proložit zadanými body. Říká se jí regresní přímka.

Příklad (pokrač.)

Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ není řešením soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$.

Platí $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}$.

Čtverec chyby, které jsme se dopustili, je

$$\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix} \|^2 = \| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \|^2 = 2/3$$

a jde o nejmenší čtverec chyby.

Řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

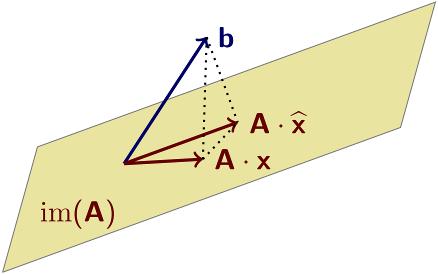
Ať $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ je soustava nad $\mathbb{R}$, kde matice $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce. Řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců probíhá následovně:

1. Protože $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, je matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ positivně definitní, tedy regulární.
2. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má tedy jediné řešení, označme toto řešení $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$.
   Tomuto jedinému řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ se říká řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců.

   Má to následující důvod:

   1. Platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$. To znamená, že $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b}$ na $\mathrm{im}(\mathbf{A})$.
   2. Protože ortogonální rejekce $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ vektoru $\mathbf{b}$ podprostorem $\mathrm{im}(\mathbf{A})$ je „nejkratší“ rejekcí vektoru $\mathbf{b}$ podprostorem $\mathrm{im}(\mathbf{A})$, platí $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$, pro každé $\mathbf{x}$.

Ilustrace řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců



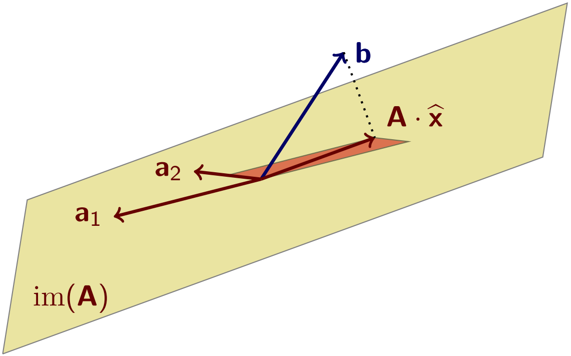
Pokud má matice soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ lineárně nezávislé sloupce, potom platí:

1. Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má právě jedno řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ metodou nejmenších čtverců.
2. Pro každé $\mathbf{x}$ platí nerovnost $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$.

Další pohled na řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců

Pro matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ s lineárně nezávislými sloupci tvoří seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ uspořádanou bázi podprostoru $W = \mathrm{im}(\mathbf{A})$.

Řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$ vzhledem k uspořádané bázi $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.



Příklad (řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců)

Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ nemá řešení (Frobeniova věta).

V našem případě: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soustava $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$ má jediné řešení $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$, vektor $\widehat{\mathbf{x}}$ není řešením soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Ovšem jakýkoli jiný vektor $\mathbf{x}$ by „dopadl ještě hůře“. Pro všechny vektory $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$ totiž platí nerovnost

$$0.5 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

Příklad (proložení paraboly)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ leží na parabole tvaru $y = ax^2 + bx + c$ právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

má řešení $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

Důležité pozorování: protože $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel, má matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

hodnost 3.

Opravdu: ať x_i, x_j, x_k jsou tři navzájem různé hodnoty z množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Potom

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_j^2 & x_j & 1 \\ x_k^2 & x_k & 1 \end{vmatrix} = (x_i - x_k) \cdot (x_i - x_k) \cdot (x_j - x_k) \neq 0$$

Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ lze proložit parabolu $y = ax^2 + bx + c$, kde $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ je řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců.

Závěrečná poznámka

Řešení soustav metodou nejmenších čtverců má řadu aplikací. Je základem regresních metod v matematické statistice, viz například knihu

- Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, 3.ed, John Wiley & Sons, New York, 2003.

Historická poznámka

Autorem metody nejmenších čtverců je německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855). V roce 1801 Gauss tuto metodu použil pro predikci dráhy planetky Ceres, která 40 dní po objevení zmizela evropským astronomům za Sluncem. Gauss předpověděl polohu, kde se planetka za 10 měsíců opět objeví.

SVD rozklad a pseudoinverse

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 14 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Cíle této přednášky

1. Každá symetrická matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má pouze reálné vlastní hodnoty a je diagonalisovatelná.[a]
   Navíc: vlastní vektory symetrické matice tvoří „hezkou bázi“ prostoru $\mathbb{R}^n$.

2. Jako důsledek předchozího ukážeme, že každou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ lze napsat jako[b]

$$\mathbf{M} = \underbrace{\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T}_{\text{SVD rozklad } \mathbf{M}}$$

   kde $\mathbf{S}$ je „diagonální“ a $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ a $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$.

3. Ukážeme aplikace SVD rozkladu.

[a] Tento výsledek nebudeme dokazovat, vyžaduje hlubší znalosti z reálné analýzy.

[b] Výpočty z této přednášky jsou časově velmi náročné. U ústní zkoušky může být vyžadováno základní pochopení teorie (str 7 a 8 tohoto tématu), nikoli výpočty.

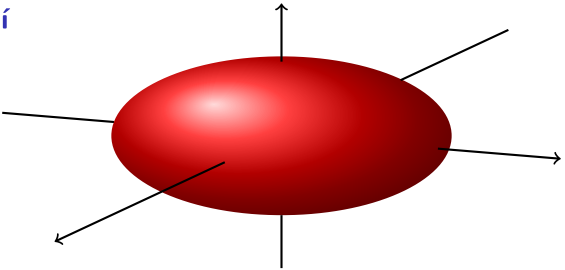
Věta o hlavních osách (pro standardní skalární součin)

Pro každou symetrickou reálnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Navíc matice $\mathbf{A}$ má pouze reálné vlastní hodnoty.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký). Viz Důsledek 14.1.5 skript. ■

Vysvětlení



$\mathbf{A}$ zobrazuje jednotkovou kouli na (případně degenerovaný) elipsoid.

Důsledek — SVD rozklad matice pro stand. skalární součin

Libovolnou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{USV}^T$, kde

1. $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ a $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ jsou ortogonální, tj. $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ a $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$.
2. $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ má na hlavní diagonále kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h$ (tzv. singulární hodnoty matice $\mathbf{M}$), kde $h = \mathrm{rank}(\mathbf{M})$. Všude jinde má matice $\mathbf{S}$ nuly.

Myšlenka důkazu.

1. Matice $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ je symetrická. Její vlastní hodnoty jsou nezáporné. Seřaďte je: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_s \geq 0$. Označte příslušnou ortonormální bázi jako $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$.
2. Definujte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_s = \sqrt{\lambda_s}$. Vyberte nenulová σ_i: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h > 0$ a definujte $\mathbf{u}_i = \mathbf{M}\mathbf{v}_i/\sigma_i$ pro $i = 1, \ldots, h$ a doplňte na ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$. ∎

Příklad (SVD rozklad)

Nalezneme SVD rozklad pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

1. $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 40 & 140 \\ 40 & 80 & 100 \\ 140 & 100 & 170 \end{pmatrix}$
2. Vlastní hodnoty $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ jsou $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 0$. Příslušná ortonormální báze vlastních vektorů je $\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right)$. Tudíž $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.
3. Singulární hodnoty $\mathbf{M}$ jsou $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 6\sqrt{10}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 3\sqrt{10}$.

Příklad (SVD rozklad, pokrač.)

4. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{M}\mathbf{v}_1/\sigma_1$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}\mathbf{v}_2/\sigma_2$:

$$\frac{1}{6\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

5. Plný SVD rozklad $\mathbf{M}$ je:

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Geometrie SVD rozkladu $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$

Matice $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ a $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ jsou tvořeny vektory nových ortonormálních bází V a U prostorů $\mathbb{R}^s$ a $\mathbb{R}^r$, ve kterých se $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ jeví jako změna měřítka $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.

$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_s \mapsto V}} \mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbb{R}^r \xrightarrow{\mathbf{T}_{U \mapsto K_r}} \mathbb{R}^r$$

Protože $\mathbf{T}_{K_s \mapsto V} = (\mathbf{T}_{V \mapsto K_s})^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ a $\mathbf{T}_{U \mapsto K_r} = \mathbf{U}$, znázorňuje vrchní obrázek opravdu

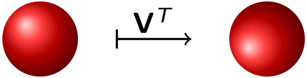
$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{V}^T} \mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbb{R}^r \xrightarrow{\mathbf{U}} \mathbb{R}^r$$

A to je přesně SVD rozklad matice $\mathbf{M}$.

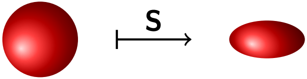
Geometrie SVD rozkladu $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ (pokrač.)

Obraz jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$ při zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$:

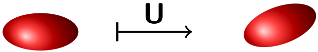
1. Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{V}^T : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$:



2. Změna měřítka (případně i s degenerací) $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$:



3. Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$:



Redukce SVD rozkladu a aproximace SVD rozkladem

Plný SVD rozklad $\mathbf{USV}^T$ matice $\mathbf{M}$ hodnosti h lze psát jako

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{h} \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

kde $\mathbf{u}_j$ jsou sloupce $\mathbf{U}$ a $\mathbf{v}_j$ jsou sloupce $\mathbf{V}$.

Částečné součty

$$\mathbf{M}_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

pro $k \leq h$ mají hodnost k a platí

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \min \{\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F \mid \mathbf{X} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r,\ \operatorname{rank}(\mathbf{X}) \leq k\}$$

kde

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} \mathbf{x}_j^T \cdot \mathbf{x}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} x_{ij}^2}$$

je Frobeniova norma matice $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s) = (x_{ij})$.

Příklad

Pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ lze psát její SVD rozklad

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

jako

$$\mathbf{M} = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + 3\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{M}_1 = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/15 & 9/15 & 18/15 \\ 6/15 & 3/15 & 6/15 \end{pmatrix}$$

Platí
$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{450}} \approx 0.477$$

Chyba při nahrazení částečným součtem SVD rozkladu

Platí rovnost:

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_h^2}$$

Speciálně:

$$\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_h^2}$$

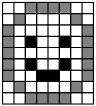
Podílu

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_h^2}{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_h^2}}$$

říkáme relativní změna matice $\mathbf{M}$ (při nahrazení $\mathbf{M}$ k-tým částečným součtem jejího SVD rozkladu).

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat

Obrázek



lze zadat maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $0 =$ bílá, $0.5 =$ šedá, $1 =$ černá.

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

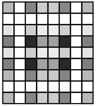
SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ má tvar $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, kde matice $\mathbf{S}$ je:

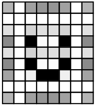
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

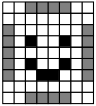
Ke kompresi stačí použít první čtyři singulární hodnoty (prvky na hlavní diagonále $\mathbf{S}$) matice $\mathbf{M}$, protože pátá až osmá singulární hodnota je rovna nule.

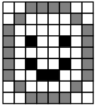
SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

Obrázky pro první čtyři aproximace matice **M** vypadají takto:









Relativní změny matice **M** jsou následující:

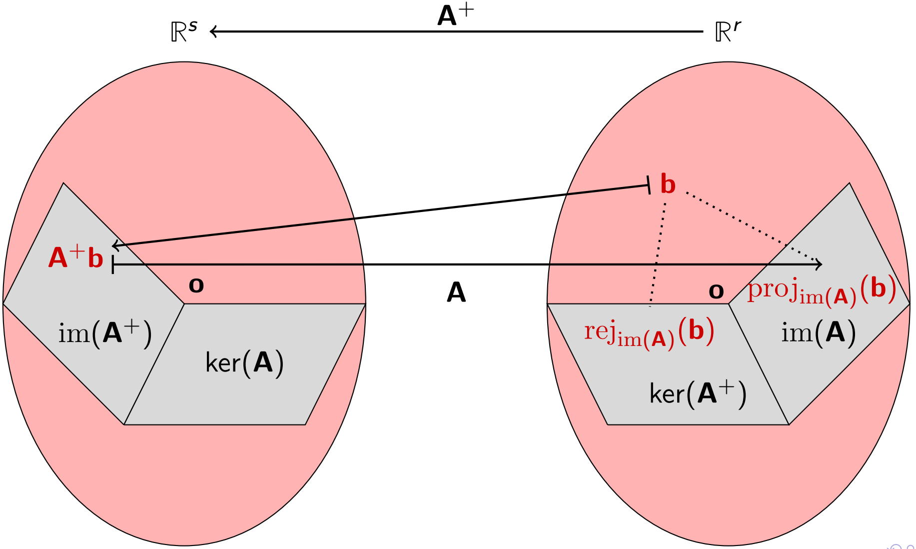
$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.61^2+1.13^2+1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.65$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.13^2+1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.45$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_3\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.30$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_4\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{0}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} = 0.00$$

Co dělat, když matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ nemá inversi?



Tvrzení

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ je matice. Potom existuje nanejvýš jedna matice $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, která splňuje následující čtyři podmínky[a]

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$$

[a] Matici $\mathbf{A}^+$, která tyto čtyři podmínky splňuje, říkáme pseudoinverse matice $\mathbf{A}$.

Důkaz.

Bez důkazu (není těžký, ale není zajímavý). Pro zájemce, viz Tvrzení 14.4.1 skript. ■

Příklady pseudoinversí

1. Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je regulární matice. Potom $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
   2. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$
   3. $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
   4. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$

2. Ať $\mathbf{O}_{s,r} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$. Potom $(\mathbf{O}_{s,r})^+ = \mathbf{O}_{r,s}$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r}$
   2. $\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s} = \mathbf{O}_{r,s}$
   3. $(\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r})^T = \mathbf{O}_{s,s} = \mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r}$
   4. $(\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s})^T = \mathbf{O}_{r,r} = \mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s}$

Příklady pseudoinversí (pokrač.)

3. Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má hodnost k. Potom $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}$
   2. $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   3. $((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
   4. $(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$

   Pozorování: v tomto případě platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$$

   To nás nepřekvapuje: tak jsme pseudoinversi vymysleli!

Věta (nalezení pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Ať $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ je plný SVD rozklad matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$. Potom platí:

1. Matice
$$\mathbf{S}^+ = (\frac{1}{\sigma_1}\mathbf{e}_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_h}\mathbf{e}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o}}_{(r-h)\text{-krát}})$$
je pseudoinverse matice $\mathbf{S}$.
2. Matice
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{VS}^+\mathbf{U}^T$$
je pseudoinverse matice $\mathbf{A}$.

Důkaz.

Bez důkazu. Viz Důsledek 14.4.5 skript. ■

Příklad (výpočet pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Nalezneme $\mathbf{M}^+$ pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Plný SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ je roven

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

a proto

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/(6\sqrt{10}) & 0 \\ 0 & 1/(3\sqrt{10}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{180} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 7 & 13 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Další aplikace SVD rozkladu — nepovinné

1. Pseudoinverse matic souvisí s metodou nejmenších čtverců, viz Dodatek C skript.
   Metoda nejmenších čtverců slouží k „proložení optimální křivky“ naměřenými daty s nejmenší kvadratickou chybou.
2. Latentní sémantické indexování databází (také: LSI), viz Dodatek G skript.
   Pro databáze lze vytvořit vektorový model a SVD rozklad lze použít k vyhledání skrytých sémantických konceptů v databázi.
3. Analýza hlavní komponenty (také: PCA), viz Dodatek G skript.
   Při analýze multidimensionálních dat lze objevit „hlavní komponenty dat“, tj. lze nalézt podstatné naměřené veličiny.
4. A mnoho dalších aplikací. . .

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 7.1, 7.2 a 7.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co již víme? (přednášky z teorie soustav lineárních rovnic)

1. Pro $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ a $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^r$ je obecné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvaru $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$.
   Množina $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$ je d-dimensionální afinní podprostor (kde $d = \mathrm{def}(\mathbf{A})$) v prostoru $\mathbb{F}^s$. Tato plocha prochází bodem $\mathbf{p}$.
2. Jakoukoli podmnožinu prostoru $\mathbb{F}^s$ tvaru $\mathbf{p} + W$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{p}$ je bod $\mathbb{F}^s$, lze považovat za množinu řešení nějaké vhodné soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Dnešní přednáška

1. Zaměříme[a] se na afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.
2. Budeme studovat vzájemnou polohu afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.
3. Porovnáme dva popisy afinních podprostorů: parametrický zápis a rovnicový zápis.

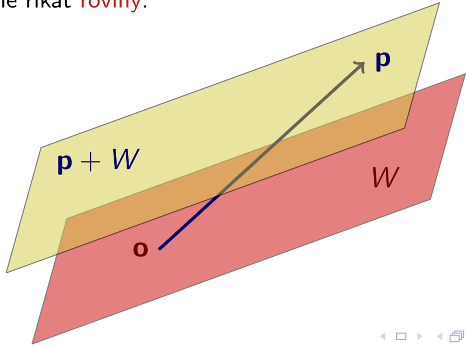
[a] Celá dnešní přednáška projde v prostorech typu $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F}$ je těleso.

Definice

Množině $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je bod z $\mathbb{R}^n$, říkáme afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Dimense[a] afinního prostoru $\mathbf{p} + W$ je číslo $\dim(W)$. Lineárnímu prostoru W říkáme směr afinního podprostoru $\mathbf{p} + W$.

---

[a] Afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 0 budeme říkat body, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 1 budeme říkat přímky, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 2 budeme říkat roviny.



Příklady afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^4$

Množiny

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\6\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}10\\9\\3\\-1\end{pmatrix}+\mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}), \quad \begin{pmatrix}1\\7\\-3\\9\end{pmatrix}+\mathrm{span}(\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix}1\\6\\0\\1\end{pmatrix}+\mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

jsou afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$. Jejich dimense jsou postupně 0, 1, 2 a 3. A jejich směry jsou:

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}, \quad \mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}), \quad \mathrm{span}(\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix}), \quad \mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

Příklad (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, intuitivní výpočet)

1. Přímky $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou rovnoběžné.

   Obě přímky mají stejný směr, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Přímky $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou různoběžné.

   To zjistíme následujícím způsobem: přímky nejsou rovnoběžné: rovnost $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ neplatí. Navíc mají obě přímky společný bod, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Příklad (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

3. Přímky $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix})$ jsou mimoběžné.

   To zjistíme následujícím způsobem: přímky nejsou rovnoběžné: rovnost $\operatorname{span}(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix})$ neplatí. Navíc obě přímky nemají společný bod: neexistují reálná čísla s, t tak, že

$$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

   O tom se lze snadno přesvědčit řešením příslušné soustavy rovnic.

Jak postupovat v $\mathbb{R}^n$?

Potřebujeme dobré definice a dobrá kritéria vzájemné polohy!

Definice (vzájemná poloha afinních podprostorů)

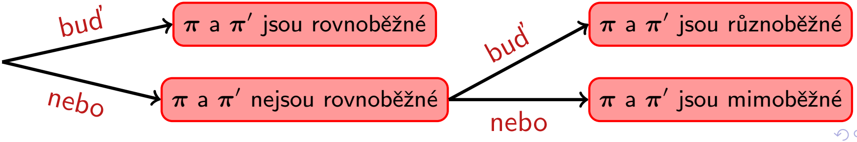
Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že

1. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné, pokud platí $W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$.
2. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod.
3. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Dimensi lineárního podprostoru $W \cap W'$ budeme říkat stupeň rovnoběžnosti afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

Poznámka

Pro dva afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ prostoru $\mathbb{R}^n$ platí:



Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Ať $W' \subseteq W$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory π a π' jsou disjunktní.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W.
3. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve W.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory π a π' jsou různoběžné.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.
3. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ leží ve $W \vee W'$.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace mimoběžných afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.
2. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Přednáška. ■

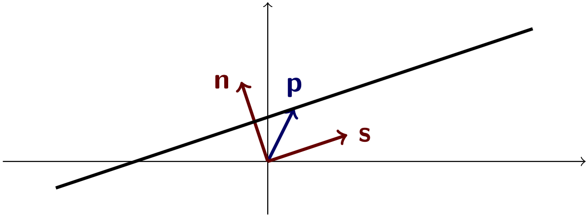
Příklad (dva různé zápisy jedné přímky)

Dva zápisy téže přímky v $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot t,\quad t\in\mathbb{R}}_{\text{parametrický zápis}} \qquad \underbrace{-x+3y=5}_{\text{rovnicový zápis}}$$

Oba typy zápisu jsme již potkali při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (-1\ 3 \mid 5)$$



Získáváme informace o směrovém vektoru a normálovém vektoru.

Tvrzení (Existence parametrického a rovnicového zápisu)

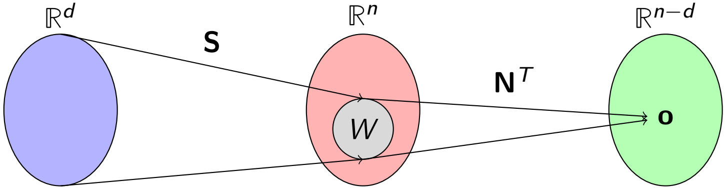
Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ je d-dimensionální afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom existují dvě matice $\mathbf{S} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{N}^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ tak, že platí:

1. Platí $\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$, $\mathrm{rank}(\mathbf{N})^T = n - d$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = d$.
2. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ pro nějaké $\mathbf{t}$. Tomuto zápisu říkáme parametrický zápis afinního podprostoru $\boldsymbol{\pi}$.
3. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$. Tomuto zápisu říkáme rovnicový zápis afinního podprostoru $\boldsymbol{\pi}$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámky

1. 

$$\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$$

Pozor: musí platit rovnosti $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = d$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$.

2. Proč je rovnicový zápis ve tvaru $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$?
   1. Bod $\mathbf{p}$ vyhovuje rovnici $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$. Ihned vidíme, že afinní podprostor prochází bodem $\mathbf{p}$.
   2. Pokud označíme jako $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-d})$, pak rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ je ekvivalentní rovnostem
   $$\langle \mathbf{n}_1 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{n}_2 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \ldots, \quad \langle \mathbf{n}_{n-d} \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$$
   To znamená, že sloupce matice $\mathbf{N}$ si lze přestavit jako seznam lineárně nezávislých „normál“ příslušného afinního podprostoru.

Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$.

1. Následující podmínky jsou ekvivalentní:
   1. Platí $W' \subseteq W$.
   2. Platí $\operatorname{span}(\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_{d'}) \subseteq \operatorname{span}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d)$, kde $\mathbf{S}' = (\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_{d'})$ a $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d)$.
   3. Simultánní soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{S}')$ má řešení.
2. Ať $W' \subseteq W$. Následující podmínky ekvivalentní:
   1. Afinní podprostory π a π' jsou disjunktní.
   2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.
   3. Soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.
   4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.

Důkaz.
Přednáška. ■

Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Ať π a π' zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory π a π' jsou různoběžné.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.
3. Soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ má řešení.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace mimoběžných afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Ať π a π' zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

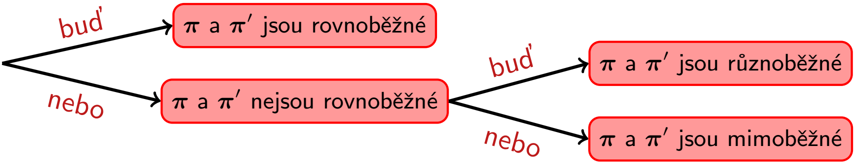
1. Afinní podprostory π a π' jsou mimoběžné.
2. Soustava $(\mathbf{S}', \ \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důležitá poznámka

Při rozhodování o vzájemné poloze afinních podprostorů π a π' je velmi rozumné postupovat podle obrázku



Povšiměte si, že tak tomu bude ve všech následujících příkladech.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$)

V $\mathbb{R}^5$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \pi' = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

1. Rovnoběžnost: ani jedna ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nemá řešení. Takže π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$, pokrač.)

1. Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

má řešení. Protože řešení neexistuje, jsou π a π' mimoběžné.

Závěr: roviny π a π' jsou mimoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

1. Rovnoběžnost: obě simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

mají zjevně řešení; $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné.

2. Jsou $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ disjunktní? Stačí zjistit, zda soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení. Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

Soustava

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

evidentně řešení nemá; přímky π a π' jsou disjunktní.

Závěr: přímky π a π' jsou rovnoběžné a disjunktní.

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a

$\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

1. Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

řešení nemá; přímky π a π' nejsou rovnoběžné.

2. Různoběžnost: protože soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení, jsou přímky π a π' různoběžné.

Závěr: přímky π a π' jsou různoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\pi' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

1. Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

řešení nemá; přímky π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

2. Různoběžnost: soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

nemá řešení, přímky π a π' jsou mimoběžné.

Závěr: přímky π a π' jsou mimoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$)

V $\mathbb{R}^4$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. Rovnoběžnost: řešíme simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Roviny budou rovnoběžné, pokud alespoň jedna simultánní soustava má řešení.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

1. Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

Simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

1. Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4 \\ R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Ani simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

Ukázali jsme, že π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

2. Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 3R_4 - R_3 \end{array}$$

Řešení existuje, π a π' jsou různoběžné.

Závěr: roviny π a π' jsou různoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Závěrečná poznámka

Tvrzení o rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti, existenci parametrického zápisu a rovnicového zápisu lze stejným způsobem dokázat v prostoru $\mathbb{F}^n$, kde $\mathbb{F}$ je jakékoli těleso.[a]

[a] To znamená: rozumíme například pojmům rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti afinních podprostorů prostoru $\mathbb{C}^6$ nad $\mathbb{C}$.

Co příště a přespříště?

1. Zavedeme vektorový součin v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.
2. Naučíme se počítat vzájemné vzdálenosti afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tyto výsledky budou podstatně využívat existenci standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$.

Vektorový součin

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.1 a B.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem.

1. Naučíme se spočítat objem k-rovnoběžnostěnu pro $k \leq n$.[a]
2. V $\mathbb{R}^n$, pro $n \geq 2$, zavedeme vektorový součin libovolného seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$. Dokážeme některé vlastnosti vektorového součinu. Tím si připravíme půdu pro příští přednášku.

[a] Připomeňme, že umíme spočítat (dokonce orientovaný) objem n-rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$.

Příští přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem, a tím pádem se standardním pojmem vzdálenosti.
Výsledky dnešní (a minulé) přednášky využijeme ke stanovení vzdálenosti dvou afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

Problém

V $\mathbb{R}^n$ je zadán seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$. Jak nalézt neorientovaný objem

$$V_k(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$$

rovnoběžnostěnu, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$?

Řešení

Označme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

1. Jestliže $k = n$, potom

$$V_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \text{absolutní hodnota} \det(\mathbf{A})$$

2. Jestliže $k < n$, potom $\det(\mathbf{A})$ není definován, protože matice $\mathbf{A}$ není čtvercová!
Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ale čtvercová je (má rozměry $k \times k$). Uvidíme, že platí

$$V_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \sqrt{\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

Definice (Gramova matice a Gramův determinant)

Ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$.

1. Matici $\mathbf{A}^T\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ budeme říkat Gramova matice seznamu vektorů $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.
2. Determinantu $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ budeme říkat Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ a značit jej $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Pozorování

V j-tém sloupci a i-tém řádku matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je hodnota standardního skalárního součinu $\langle \mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$.

Tento jednoduchý fakt umožní dát Gramově determinantu $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ jasný geometrický význam.

Tvrzení (význam Gramova determinantu)

Ať $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ je seznam vektorů v $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Potom platí:

1. $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \geq 0$.
2. $\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) > 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé.
3. Hodnota[a] $\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}$ udává k-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

[a] Slogan: Gramova matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je „druhá mocnina" matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Proto je $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ „druhá mocnina" „determinantu" $\mathbf{A}$. Absolutní hodnota „determinantu" $\mathbf{A}$ je tudíž $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}$. Jde ale pouze o slogan, který slouží k zapamatování; matice $\mathbf{A}$ obecně není čtvercová, proto o determinantu matice $\mathbf{A}$ obecně nemůžeme mluvit!

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz není těžký, ale je zdlouhavý, viz Tvrzení B.1.3 skript. ■

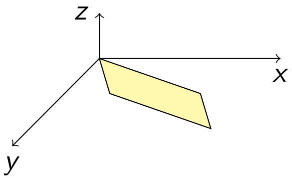
Příklad

Určete 2-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$, určeného vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 16$$

Hledaný 2-dimensionální objem je $\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = 4$.



Příklad

Určete 3-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^4$, určeného vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 72$$

Hledaný 3-dimensionální objem je

$$\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \sqrt{72} \approx 8.485$$

Připomenutí známých faktů a definice vektorového součinu

1. Pro každé lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje jediný vektor $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$
Jednoduché: $\mathbf{f}$ „je“ matice s 1 řádkem a n sloupci, označme ji $\mathbf{a}^T$, pro $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$.

2. Pro libovolný seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ vektorů z $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, je zobrazení
$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, -) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$$
lineární.

3. To znamená, že pro zadaný seznam $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ existuje jednoznačně určený vektor $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$ tak, že platí
$$\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$
pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.
Místo $\mathbf{a}$ budeme psát $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ a budeme mu říkat vektorový součin seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$.

Přepis definice vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.

Základní vlastnost vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

Pro jakékoli $j = 1, \ldots, n-1$ platí

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = 0$$

tj. vektor $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ je kolmý na všechny vektory $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.

To je snadné:

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = \underbrace{\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j)}_{\text{determinant se dvěma shodnými sloupci}} = 0$$

Tvrzení (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

Platí rovnost $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$.

Důkaz.

$$\text{Platí } \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{e}_i \rangle}_{=i\text{-tá souřadnice vektoru } \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})} \cdot \mathbf{e}_i,$$

protože $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je ortonormální báze pro standardní skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^n$. Ale

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{e}_i \rangle}_{=\det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i)} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$$

podle definice vektorového součinu. ■

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^2$

$$\times(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-x_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=x_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

a to je známý výpočet vektoru, kolmého na vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Například $\times\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ (je zvykem psát $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ místo $\times(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$)

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22} \\ x_{31}x_{12} - x_{11}x_{32} \\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{pmatrix}$$

a to je nezapamatovatelné.

Mnemotechnická pomůcka (nejde o definici vektorového součinu)

$$\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \ldots & x_{n-2,n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

Jde o ryze formální[a] zápis, ale užitečný. Například

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & \mathbf{e}_1 \\ x_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

a tak dále. A takové vzorce se již zapamatovat dají.

---

[a] Napravo od rovnítka totiž mezi značkami pro determinant není zapsána matice. Počítejte ale, jako by to determinant byl. Viz následující příklady.

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & 4 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_3 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot \mathbf{e}_1$$

$$-2 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 - (-1) \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_3 - 4 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 3$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^4$)

$$\times\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tvrzení (další vlastnosti vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

1. Funkce $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mapsto \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ je lineární v každé položce.
2. $\times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$, pro $\pi \in S_{n-1}$.
3. $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$, pro $\pi \in S_n$.
4. $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}))$.
5. $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{o}$ platí právě tehdy, když vektory $\mathbf{x}_1$, …, $\mathbf{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé.
6. $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})}$. To jest: norma $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\|$ je rovna $(n-1)$-dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{x}_1$, …, $\mathbf{x}_{n-1}$.

Poznámky k důkazu na přednášce. Všechny vlastnosti plynou okamžitě z vlastností determinantu a z definice vektorového součinu.

Metrické výpočty v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.3 a B.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Víme, co je afinní podprostor dimense d v prostoru $\mathbb{R}^n$.

   Připomenutí: jde o množinu $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor dimense d v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je vektor v $\mathbb{R}^n$.

2. Pro dva afinní podprostory $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ v $\mathbb{R}^n$ umíme rozhodnout, zda jsou rovnoběžné, nebo různoběžné, nebo mimoběžné.

3. Víme, co je vektorový součin[a] $\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.

   Připomenutí: $\langle \times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.

   Dále víme, že platí rovnost
   $\|\times(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})}$.

[a] Prostor $\mathbb{R}^n$ je vybaven standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Dnešní přednáška

Pro dva afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem spočteme jejich vzájemnou vzdálenost.

V dalším budeme značit:

1. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ je standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
2. $\|\mathbf{x}\|$ je norma v $\mathbb{R}^n$, vytvořená standardním skalárním součinem, tj. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$.

   Pro $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je
   $$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
   To jest: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ je standardní eukleidovská vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice

Ať $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu[a]

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \inf\left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}' \in \boldsymbol{\pi}' \right\}$$

říkáme vzájemná vzdálenost $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

[a] Z definice vzájemné vzdálenosti ihned plyne, že $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi})$.

Poznámky k definici

1. Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ není definice příliš zajímavá.
   1. $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{o}\}$, proto pro jakákoli $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ platí $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = 0$.
   2. Prostor $\mathbb{R}^1$ má jako afinní podprostory buď body nebo celé $\mathbb{R}^1$. To znamená $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|$, nebo $\omega(\mathbf{p}, \mathbb{R}) = \omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 0$.
2. V obecném $\mathbb{R}^n$ víme: $\left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}' \in \boldsymbol{\pi}' \right\}$ je neprázdná a zdola omezená množina reálných čísel. Tudíž její infimum existuje a reálné číslo $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ je korektně definováno.

Problém: jak spočítat hodnotu $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ v obecném $\mathbb{R}^n$?

Věta (výpočet vzáj. vzdálenosti dvou afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom platí:[a]

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

[a] Protože $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi})$, je také $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$.

Hlavní myšlenky důkazu (u zkoušky budou požadovány pouze tyto myšlenky)

1. Vzdálenost $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ by měla být délka kolmé příčky prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.
   Tak je tomu v $\mathbb{R}^2$ při výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžek.
   Obecný případ by měl dopadnout analogicky.

2. Obecně: kolmá příčka k $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ by měla mít směr V, kde $V = \{\mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{w} \text{ z } W \vee W'\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé na podprostor $W \vee W'$.

   Je to ale v pořádku? Je V lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$?

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

3. Vše je v pořádku:

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v}\rangle = 0 \text{ pro všechna } \mathbf{w} \in W \vee W'\} \\ &= \bigcap_{\mathbf{w} \in W \vee W'} \{\mathbf{v} \mid \langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v}\rangle = 0\} \\ &= \bigcap_{\mathbf{w} \in W \vee W'} \ker(\langle \mathbf{w} \mid -\rangle) \end{aligned}$$

   Proto je V lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$.

4. Najdeme[a] body $\mathbf{x}_0$ v π a $\mathbf{x}_0'$ v π' tak, že platí rovnost[b] $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' = \mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

   To znamená, že $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' \in V$, proto $\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}_0' + V$ je hledaná kolmá příčka π, π', procházející body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_0'$.

---

[a] To je mírně technické (nikoli těžké): viz důkaz Věty B.3.3 skript.

[b] Podle definice V platí také $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' = \mathrm{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Toho v dalších výpočtech několikrát využijeme.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

5. Pro jakékoli $\mathbf{x}$ v π a jakékoli $\mathbf{x}'$ v π' platí

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

Proto podle Pythagorovy věty[a] platí

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$$

a tedy $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2$, neboli

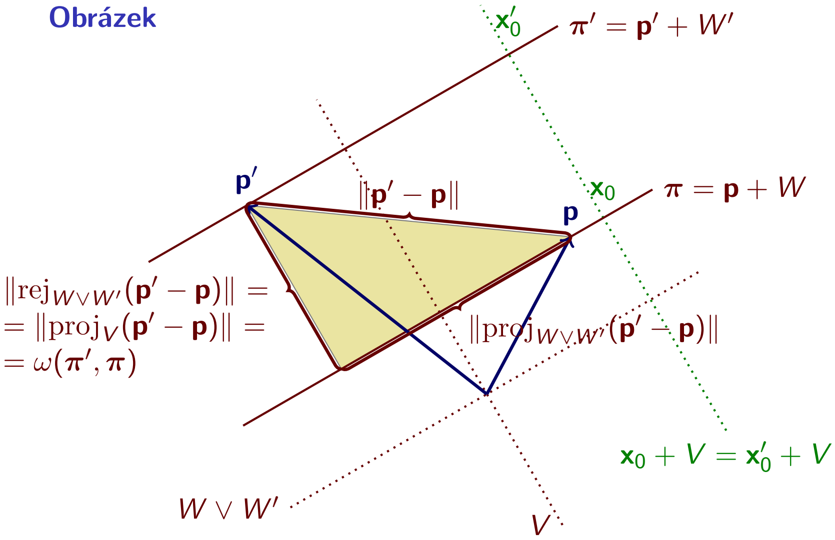
$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

To znamená, že platí[b] $\omega(\pi, \pi') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. ■

---

[a] Z definice V platí $\langle \mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0 \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rangle = 0$.
[b] Podle definice V platí také $\omega(\pi, \pi') = \|\mathrm{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$.

Obrázek


$\mathbf{x}_0'$
$\pi' = \mathbf{p}' + W'$
$\mathbf{x}_0$
$\pi = \mathbf{p} + W$
$\mathbf{p}'$
$\mathbf{p}$
$\|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|$
$\|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| =$
$= \|\mathrm{proj}_V(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| =$
$= \omega(\pi', \pi)$
$\|\mathrm{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$
$\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}_0' + V$
$W \vee W'$
V

Poznámky

1. Vzorec $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ platí v $\mathbb{R}^n$ s libovolným skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$, který vytváří normu $\| - \|$.

   Důkaz hlavní věty totiž nikde nevyužívá, že skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ je standardní.

   Jediné, co důkaz vyžaduje, je pojem ortogonální rejekce a platnost Pythagorovy věty.[a]

2. V dalším se omezíme na standardní skalární součin v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

   Tam jsou příslušné vzorce pro vzájemnou vzdálenost dvou afinních podprostorů poměrně snadno pochopitelné.

---

[a] Připomenutí: ortogonální projekce umíme počítat pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$, vzorce jsou však poněkud barokní. Takže, pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$, umíme počítat (barokním způsobem) i ortogonální rejekce. Pythagorova věta platí pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Důležité upozornění

Ve zbytku přednášky odvodíme celou řadu vzorců pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ se standardními skalárními součiny. Tyto vzorce nebudou zkoušeny stylem: *Napište vzorec pro vzdálenost bodu od přímky v* $\mathbb{R}^3$, atd.

Bude vyžadováno:

1. Znát obecný vzorec $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ a znát hlavní myšlenky jeho odvození z předchozích stran.
2. Z přednášky o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích znát vzorec
$$\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}$$
pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^n$. Viz následující stranu.
3. Tvůrčí uplatnění výše uvedeného vzorce pro ortogonální projekci k nalezení vzájemných vzdáleností v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

Připomenutí (přednáška o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích)

V $\mathbb{R}^n$ pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ platí

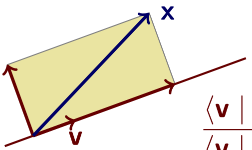
$$\|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \right| \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$$

a tudíž

$$\|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\|$$

$$\underbrace{\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}}$$

ortogonální rejekce osou $\mathbf{v}$



$$\underbrace{\frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}}$$

ortogonální projekce na osu $\mathbf{v}$

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$

1. Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s})$. V tomto případě je[a]
   1. $W \vee W' = \mathrm{span}(\mathbf{s})$.
   2. $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \left\| (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \dfrac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s} \right\|$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \mathrm{span}(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{s}})$ je tedy $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$ rovno

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \ldots = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

[a] Tento vzorec není příliš „hezký“. Lepší postup: definujte $\mathbf{n} = \times(\mathbf{s})$ a pracujte s přímkou $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. Viz další příklad.

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$ (pokrač.)

2. Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. V tomto případě je
   1. $V = \mathrm{span}(\mathbf{n})$.
   2. Neznáme směr $\mathbf{s}$ zadané přímky, ale platí $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\mathrm{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \dfrac{|\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$
   $= \dfrac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \dfrac{|\mathbf{n}^T\mathbf{p}' - \mathbf{n}^T\mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a přímku $\boldsymbol{\pi}$ zadanou rovnicí[a] $\underbrace{-6x + 3y}_{=\mathbf{n}^T\mathbf{x}} = \underbrace{-18}_{=\mathbf{n}^T\mathbf{p}}$

je tedy $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$ rovno

$$\frac{\Big|-6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 18\Big|}{\sqrt{45}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

[a] Jde o stejnou přímku, jako v minulém příkladu.

Vzdálenost dvou přímek v $\mathbb{R}^2$

Jsou zadány přímky $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s})$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathrm{span}(\mathbf{s}')$.

1. $\mathrm{span}(\mathbf{s}) \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}') =$
$$\begin{cases} = \mathrm{span}(\mathbf{s}), & \text{jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně závislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \boldsymbol{\pi} \text{ a } \boldsymbol{\pi}' \text{ rovnoběžné} \\ = \mathbb{R}^2, & \text{jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně nezávislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \boldsymbol{\pi} \text{ a } \boldsymbol{\pi}' \text{ různoběžné} \end{cases}$$
2. Pokud $\mathrm{span}(\mathbf{s}) \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}') = \mathrm{span}(\mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$$
Vzdálenost bodu od přímky již umíme počítat.
3. Pokud $\mathrm{span}(\mathbf{s}) \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}') = \mathbb{R}^2$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^3$

Je dán bod $\mathbf{p}'$ a přímka $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s})$. Potom

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \mathrm{proj}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

$$= \left\|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s}\right\|$$

což je formálně stejný vzorec jako v $\mathbb{R}^2$.

Je-li přímka $\boldsymbol{\pi}$ zadána rovnicově jako $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$, kde $\mathrm{rank}(\mathbf{N}) = 2$, pak $V = \mathrm{im}(\mathbf{N})$. Proto

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\mathbf{N})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{N}(\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

Leckdy je lepší postup je vyřešit soustavu $\mathbf{N}^T\mathbf{x} = \mathbf{N}^T\mathbf{p}$, získat tak $\boldsymbol{\pi}$ v parametrickém tvaru a použít výše uvedený vzorec.

Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{R}^3$

Pro vzdálenost bodu $\mathbf{p}'$ od roviny $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$ platí

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T\mathbf{p}' - \mathbf{n}^T\mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

kde jsme využili toho, že $\mathbf{n}$ je normála roviny $\boldsymbol{\pi}$.

Získáváme tak formálně stejný vzorec jako pro vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$.

Je-li rovina $\boldsymbol{\pi}$ zadána jako $\mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je vhodné spočítat[a] $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ a použít předchozí postup pro rovinu $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$.

---

[a]Připomenutí mnemotechniky: $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \mathbf{e}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \mathbf{e}_2 \\ s_{31} & s_{31} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$.

Vzdálenost přímky od roviny v $\mathbb{R}^3$

Ať $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathrm{span}(\mathbf{s}')$ je přímka a $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ je rovina. Platí

$$\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{pokud } \mathbf{s}', \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \text{ jsou lineárně nezávislé, tj., pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou různoběžné,} \\ \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), & \text{pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

1. Je-li $\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbb{R}^3$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

2. Je-li $\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\mathrm{span}(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$
$$= \frac{|\langle \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix})$ a $\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Protože $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, jsou π a π' rovnoběžné.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})}} = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 56 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}} = \frac{142}{\sqrt{684}} \approx 5.43$$

Vzdálenost přímky od přímky v $\mathbb{R}^3$

Ať $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathsf{span}(\mathbf{s}')$ a $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s})$ jsou přímky.
Platí

$$\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \mathsf{span}(\mathbf{s}), & \text{pokud } \mathbf{s}' \text{ a } \mathbf{s}\text{, jsou lineárně závislé} \\ & \text{tj., pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou rovnoběžné}, \\ \mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s}), & \text{pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ nejsou rovnoběžné}. \end{cases}$$

1. Je-li $\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \mathsf{span}(\mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$$
a vzdálenost bodu od přímky už umíme počítat.

2. Je-li $\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{s}' \times \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$
$$= \frac{|\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}' \times \mathbf{s}\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Přímky $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ zjevně nejsou rovnoběžné.

Platí

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.183$$