Lineární prostory nad $\mathbb{R}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co je definice?

Co je hypotéza?

Co je (matematická) věta? Lemma? Tvrzení?

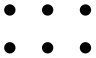
Co je důkaz?

Více např. v textech

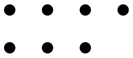
1. J. Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*
2. J. Velebil, *Sbírka problémů z lineární algebry*

Co je definice?

Vysvětlíme na pojmu sudost: některá přirozená čísla lze „seřadit do dvojic“, některá přirozená čísla „seřadit do dvojic“ nejdou:



versus



Definice

Ať x je přirozené číslo.[a] Řekneme, že x je sudé,[b] pokud platí rovnost $x = 2k$ pro nějaké přirozené číslo k.

[a] Nula je přirozené číslo.

[b] Slovo sudé znamená ve staročeštině složený ze dvou dílů.

Důležité poznámky

1. Definice jsou psány českými oznamovacími větami.
2. Každá definice obsahuje dvě části: pojmenování pojmu a charakteristickou vlastnost pojmu.
3. U definice nedává smysl mluvit o její „pravdivosti“ či „nepravdivosti“.

Co je hypotéza?

Hypotéza 1

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x+3$ je sudé přirozené číslo.

Hypotéza 2

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x+6$ je sudé přirozené číslo.

Důležité poznámky

1. Hypotézy jsou psány českými oznamovacími větami.
2. Každá hypotéza má formu úsudku o již definovaných pojmech: musí obsahovat dvě části: předpoklad(y) a závěr.
3. U hypotézy nás zajímá její pravdivost či nepravdivost.

Co je věta (tvrzení, lemma) a její důkaz?

Věta

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x+6$ je sudé přirozené číslo.

Důkaz

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x=2k$ pro nějaké přirozené číslo k. Potom $x+6=2k+6=2(k+3)$. Protože $k+3$ je přirozené číslo, je $x+6$ číslo sudé. ■

Důležité poznámky

1. Důkaz je psán českými oznamovacími větami.[a]
2. Důkaz je konečná a korektní argumentace, která oponenta přesvědčí o pravdivosti dokazovaného tvrzení.[b]

---

[a] Na přednáškách budeme používat „těsnopis“, který lze snadno do oznamovacích vět přepsat.

[b] Toto je neformální vysvětlení pojmu důkaz. Formální důkazy studuje matematická logika.

Neformálně

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je kolekce jakýchkoli objektů (těm budeme říkat vektory[a]), které mezi sebou můžeme sčítat a každý z nich můžeme vynásobit skalárem (v našem případě prvkem $\mathbb{R}$).

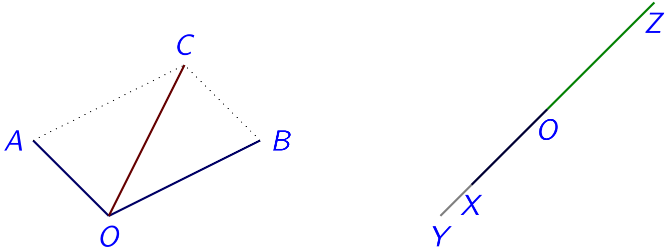
Sčítání vektorů a násobení skalárem se musí řídit jistými zákonitostmi. Tyto zákonitosti mají umožnit (například) řešit „lineární rovnice".

---

[a] Slovo *vektor* pochází z latiny. Český překlad by mohl být *přenašeč* (fyzikální vektor „přenáší" bod do jiného bodu).
Důležité: Obecný vektor je prvek obecného lineárního prostoru. Vektor obecně nemá velikost a nemá směr.

Příklad (orientované úsečky v rovině)

Dvě operace:



sčítání: $OC = OA + OB$
násobení skalárem: $OY = \sqrt{2} \cdot OX$, $OZ = -\sqrt{2} \cdot OX$

Sčítání orientovaných úseček a násobení orientované úsečky reálným skalárem splňují jisté axiomy.

Motivace axiomů pro lineární prostor

Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici $2x + 7 = 4$.
Postup (ekvivalentní úpravy):

$$\begin{aligned}
2x + 7 &= 4 \\
(2x + 7) + (-7) &= 4 + (-7) \\
\big(2x + (7 + (-7)\big) &= 4 + (-7) \\
2x + 0 &= 4 + (-7) \\
2x &= 4 + (-7) \\
2^{-1} \cdot \big(2x\big) &= 2^{-1} \cdot \big(4 + (-7)\big) \\
\big(2^{-1} \cdot 2\big)x &= 2^{-1} \cdot \big(4 + (-7)\big) \\
1 \cdot x &= 2^{-1} \cdot \big(4 + (-7)\big) \\
x &= 2^{-1} \cdot \big(4 + (-7)\big)
\end{aligned}$$

Všimněme si: pro algoritmus jsou důležité vlastnosti operací.

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$)

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{R} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
   2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
   3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
   4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Příklady

1. Orientované úsečky v rovině (fyzikální, případně geometrická intuice).
2. Reálné polynomy (značení: $\mathbb{R}[x]$).
3. n-tice reálných čísel (značení: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$).[a]
4. Komplexní čísla nad $\mathbb{R}$ (značení: $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$), tzv. Gaussova rovina.
5. Řada dalších příkladů...

---

[a] Důležité: Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme psát jako n-tice do sloupců.

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

1. Nulový vektor je jednoznačně určen.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
3. Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

1. Ať existují $\vec{o_1}, \vec{o_2}$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o_2} = \vec{o_2} + \vec{x} = \vec{x}$. Pak $\vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{o_2} = \vec{o_2}$.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Takže pro libovolný vektor $\vec{v}$ platí $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = (\vec{v} + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Takže $0 \cdot \vec{x}$ se chová jako nulový vektor. Proto $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

3. Platí: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 - 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
4. Platí: $a \cdot \vec{o} = a \cdot (0 \cdot \vec{o}) = (a \cdot 0) \cdot \vec{o} = 0 \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

■

Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.
Ať $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1}. Tudíž
$\vec{o} = a^{-1} \cdot \vec{o} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. ■

Povšimněme si, čeho využívá předchozí tvrzení:

Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: a^{-1} existuje, jakmile $a \neq 0$.

Další příklady a protipříklady

1. $L = (0, +\infty)$. Operace sčítání vektorů: $x \oplus y := x \cdot y$. Násobení skalárem: $\alpha \odot x := x^{\alpha}$. Pak L je lineární prostor.
2. L je jakákoli jednoprvková množina. Pak L (spolu s evidentními operacemi) je lineární prostor. Říkáme mu triviální lineární prostor. Nutně: $L = \{\vec{o}\}$.
3. $L = \mathbb{R}^2$. Operace: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$, $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$. Nejde o lineární prostor.

Role reálných skalárů

Lze $\mathbb{R}$ nahradit jiným „číselným oborem“?

Se skaláry je třeba umět následující: rozumné sčítání, násobení.

Abstraktní pojem: skaláry musí tvořit strukturu $\mathbb{F}$, které se říká těleso.

To vede k pojmu lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Více v příští přednášce (téma 01B).

Poznámka

Abstrakce v lineární algebře má tedy dva stupně:

1. Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ abstrahuje (například) prostor orientovaných úseček.
2. Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ abstrahuje dále: roli skalárů převezmou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

1. Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
   Díky asociativitě sčítání nemusíme psát závorky.
2. Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
   Díky axiomům jde opět o násobek $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
3. Obecněji, můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů.
   To znamená: je-li dán konečný seznam vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a konečný seznam skalárů[a] $(a_1, \dots, a_n)$, lze utvořit lineární kombinaci

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

[a] Těmto skalárům říkáme koeficienty lineární kombinace.

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ vytvářejí „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$.
Tento „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$ prochází počátkem a má směr $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Příští přednášky: těmto „rovným kusům“ v $\mathbb{R}^n$ budeme říkat lineární podprostory $\mathbb{R}^n$.

Pochopitelně, v příštích přednáškách budeme pracovat daleko abstraktněji než v $\mathbb{R}^n$.

Slogan je reklamní heslo!

Na přednášce budeme zmiňovat řadu sloganů. Slogany mají sloužit k intuitivnímu pochopení. Slogany v žádném případě nemohou nahradit přesná znění definic, vět, atd.