Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 2.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Báze lineárního (pod)prostoru.

   Intuitivní význam: báze je výběr systému souřadnicových os.

2. Dimense lineárního (pod)prostroru.

   Intuitivní význam: dimense je počet souřadnicových os.

Dnešní přednáška

1. Souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi.

   Intuitivní význam: souřadnice vektoru udávají „úseky“ vektoru na jednotlivých souřadnicových osách.

2. Ukážeme velmi užitečný pohled na zobrazení (funkce): kalkulus komutativních diagramů.

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L. Pro každý vektor $\vec{x}$ v L existuje jediný seznam $(a_1, \dots, a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

Seznamu $(a_1, \dots, a_n)$ z předchozí věty říkáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$. Značení:[a]

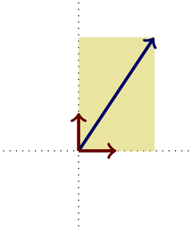
$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

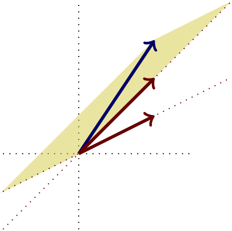
---

[a] Tj, souřadnice vektoru $\vec{x}$ chápeme jako další vektor: vektor souřadnic v $\mathbb{F}^n$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy $K_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix})$ jsou uspořádané báze prostoru $\mathbb{R}^2$. (Seznam K_2 je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$.)





$$\mathbf{coord}_{K_2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{coord}_{B}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Důležitá vlastnost kanonické báze

Připomenutí: prostor $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$ má kanonickou bázi $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ať $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor v $\mathbb{F}^n$. Potom $\mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Důležitá vlastnost každé uspořádané báze

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze prostoru L nad $\mathbb{F}$. Potom platí rovnosti[a]

$$\mathbf{coord}_B(\vec{b}_1) = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_2) = \mathbf{e}_2, \ldots,\ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_n) = \mathbf{e}_n$$

[a] Těchto rovností budeme mnohokrát využívat při studiu matic lineárních zobrazení (témata 05A a 05B).

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy

$$B_1 = (1, x, x^2) \qquad B_2 = (x^2, x, 1)$$

jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Platí:

$$\mathbf{coord}_{B_1}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{coord}_{B_2}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x^2-2x+4 = 4\cdot 1+(-2)\cdot x+3\cdot x^2, \quad 3x^2-2x+4 = 3\cdot x^2+(-2)\cdot x+4\cdot 1$$

Tvrzení (linearita výpočtu souřadnic)

Ať B je (jakákoli) konečná uspořádaná báze lineárního prostoru L. Potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ platí:[a]

1. $\mathbf{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + \mathbf{coord}_B(\vec{y})$.
2. $\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x})$.

[a] Tyto dvě vlastnosti jsou velmi důležité. V tématu 04A je budeme studovat abstraktně (vedou k pojmu lineárního zobrazení).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámky

- Slova *funkce* a *zobrazení* znamenají totéž.
- Skládání zobrazení značíme stejně jako násobení (tj. tečkou). Uvidíme později, že skládání zobrazení skutečně je jistý druh násobení.

Několik připomenutí

1. Zadat zobrazení (také: funkci) $f : X \to Y$ znamená: pro každé $x \in X$ zadat právě jedno $y \in Y$. Toto y značíme $f(x)$ (funkční hodnota v x).
   Píšeme[a] i $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto f(x)$.
2. Pro zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ značíme $g \cdot f : X \to Z$ složené zobrazení $x \mapsto g(f(x))$.

[a] Důležité je rozlišovat: šipka $f : X \to Y$ versus šipka s patkou $x \mapsto f(x)$.

Zobrazení (znovu a podrobně)

Přesná definice zobrazení $f : X \to Y$ zní:

Zobrazení $f : X \to Y$ je podmnožina $X \times Y$ taková, že pro všechna $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$. Takovému y říkáme funkční hodnota f v bodě x. Místo y píšeme $f(x)$.

Potom lze dokázat:

1. Pro libovolnou množinu Y existuje právě jedno zobrazení $f : \emptyset \to Y$.
2. Pro libovolnou množinu X existuje právě jedno zobrazení $f : X \to \{y\}$.
3. Je-li X neprázdná množina, pak neexistuje zobrazení $f : X \to \emptyset$.

Identické zobrazení a skládání zobrazení

1. Identita na X je zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$, kde $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$.
2. Platí $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ a $\mathrm{id}_Y \cdot f = f = f \cdot \mathrm{id}_X$, kdykoli je skládání definováno.

Slogan: můžeme malovat obrázky!

1. Místo $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $g \cdot f : X \to Z$ můžeme kreslit
$$X \xrightarrow{f} Y \qquad Y \xrightarrow{g} Z \qquad X \xrightarrow{g \cdot f} Z$$
nebo dokonce psát rovnosti, například
$$X \xrightarrow{g \cdot f} Z \qquad = \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
2. Protože skládání je asociativní, můžeme nakreslit i obrázek
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$
a tento obrázek má (díky asociativitě skládání) jednoznačný význam.

Místo slova *obrázek* budeme používat slovo diagram.

Speciální vlastnosti zobrazení

1. Zobrazení $f : X \to Y$ je prosté (také: injektivní nebo injekce), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.
2. Zobrazení $f : X \to Y$ je na (také: surjektivní nebo surjekce), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x) = y$.
3. Zobrazení $f : X \to Y$ je bijekce (také: vzájemně jednoznačné), když f je injekce a surjekce současně.

Injekce/surjekce/bijekce a jejich skládání

1. Složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce.
2. $f : X \to Y$ je bijekce právě tehdy, když f je invertibilní. To jest: právě tehdy, když existuje jednoznačně určené[a] $g : Y \to X$ tak, že $g \cdot f = \mathrm{id}_X$ a $f \cdot g = \mathrm{id}_Y$.

[a] Tomuto jednoznačně určenému zobrazení se říká inverse zobrazení f a značí se také f^{-1}.

Diagramy pro invertibilní zobrazení

Zobrazení $X \xrightarrow{f} Y$ je invertibilní (také: má inversi), pokud existuje $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ tak, že diagramy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[d, "f^{-1}"] \\ & X \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Y"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

jsou komutativní,[a] tj., vyjadřují rovnosti $f^{-1} \cdot f = \mathrm{id}_X$ a $f \cdot f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

[a] Neformálně: toto slovo znamená, že všechny cesty ze „začátku“ diagramu do „konce“ diagramu dávají stejný výsledek.

Komutativní trojúhelníky a komutativní čtverce

1. Komutativní trojúhelník

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

vyjadřuje rovnost $h = g \cdot f$, tj., vyjadřuje platnost rovnosti $h(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in X$.

2. Komutativní čtverec

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & B \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

vyjadřuje rovnost $g \cdot f = k \cdot h$, tj., vyjadřuje platnost rovnosti $g(f(x)) = k(h(x))$ pro všechna $x \in X$.

Skládání je „slepování“ šipek

Šipky $X \xrightarrow{f} Y$ a $Y \xrightarrow{g} Z$ slepíme za „společný šev“ Y a dostaneme $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.
Při dobrém šití nemá být šev vidět, tj., nakonec napíšeme šipku $X \xrightarrow{g \cdot f} Z$.

Funguje „slepování“ komutativních čtverců?

Ať

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ X \arrow[u, "a"] \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[u, "b"'] \end{tikzcd} \quad \text{a} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \\ Y \arrow[u, "b"] \arrow[r, "k"'] & Z \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

jsou komutativní čtverce. „Společný šev“ je šipka $\begin{tikzcd} B \\ Y \arrow[u, "b"] \end{tikzcd}$.

Jdou oba čtverce za tento šev slepit?

„Slepování“ komutativních čtverců funguje!

Slepíme za společný šev

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ X \arrow[u, "a"] \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[u, "b"'] \arrow[r, "k"'] & Z \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

a necháme šev zmizet

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \cdot f"] & C \\ X \arrow[u, "a"] \arrow[r, "k \cdot h"'] & Z \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

Výsledný čtverec je opět komutativní. [a]

---

[a] Důležité: tuto techniku budeme často používat. Projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.