GEM a soustavy lineárních rovnic: část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice jako (speciální) lineární zobrazení. Obecná lineární zobrazení lze representovat maticí (vzhledem k zadaným bázím).
2. Algebra matic (sčítání matic, násobení matic skalárem, násobení matic mezi sebou).
3. Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kóduje soustavu lineárních rovnic.

Dnešní přednáška

1. Gaussova eliminační metoda (GEM) jako universální a systematická metoda řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Příští přednáška

1. Maticové rovnice.
2. Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Připomenutí (maticový zápis soustavy lineárních rovnic)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice nad $\mathbb{F}$ o r řádcích a s sloupcích, $\mathbf{x}$ je v $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{b}$ je v $\mathbb{F}^r$, kóduje soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{F}$.

Terminologie: $\mathbf{A}$ je matice soustavy, $\mathbf{b}$ je pravá strana rovnice, $\mathbf{x}$ je vektor neznámých. Matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ (také: $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$) je rozšířená matice soustavy.
Například

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -42 \end{pmatrix}$$

je zápis soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & -42 \end{array}$$

nad $\mathbb{R}$.

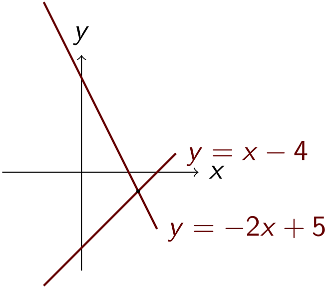
Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav)

Pro soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

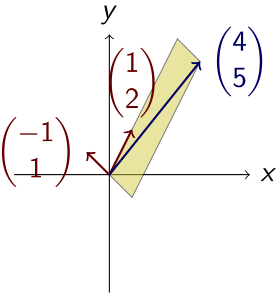
nad $\mathbb{R}$ je řešení

1. Průsečík dvou přímek: $x - y = 4$ a $2x + y = 5$:



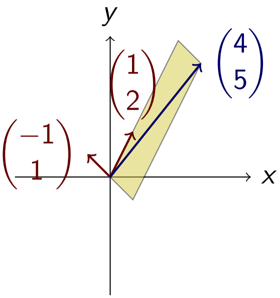
Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav, pokrač.)

2. Pravá strana je lineární kombinací sloupců matice soustavy
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

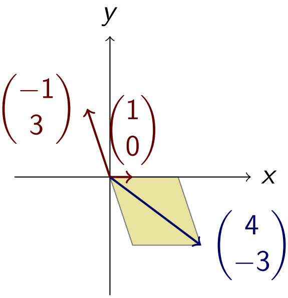


Řešení jsou koeficienty této lineární kombinace.

Výhoda druhého pohledu na řešení soustav



lze převést isomorfismem na



Koeficienty lineární kombinace situace napravo se najdou snadno.

Gaussova eliminační metoda je přesně postupné převádění vhodnými isomorfismy do příjemné polohy!

Ve zbytku přednášky

1. Zaměříme se na problém řešení soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   Konvence: Nebude-li řečeno jinak, je soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve zbytku přednášky soustavou r rovnic o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

   Soustavy budeme většinou zapisovat rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nebo $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$.

   Zformulujeme a dokážeme důležitý výsledek: Frobeniovu větu o řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

2. Jako technický prostředek použijeme Gaussovu eliminační metodu (zkráceně: GEM). GEM převádí matice (a tím i soustavy) na „příjemný“ tvar.

Věta (Frobenius)

1. Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když platí rovnost $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Pokud $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, potom lze říci následující:

   Zvolme jakékoli $\mathbf{p}$, splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
   Potom $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})\}$ je množina všech řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Důkaz.

1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když $\mathbf{b}$ je v $\operatorname{im}(\mathbf{A})$. To nastane právě tehdy,[a] když $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$. Viz str 12, téma 03A.
2. Triviální.

$\blacksquare$

[a] Využíváme jednoduchých pozorování: $\operatorname{im}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a $\operatorname{im}(\mathbf{A}) \vee \operatorname{span}(\mathbf{b}) = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}) = \operatorname{im}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Potřebujeme rychle a pohodlně zjistit následující

1. $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$, $\operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
2. Nalézt $\mathbf{p}$ tak, aby $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$, a popsat (bázi prostoru) $\ker(\mathbf{A})$.

Základní myšlenka

Soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ mají stejné množiny řešení, jakmile $\mathbf{P}$ je isomorfismus.[a] Navíc platí: $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \operatorname{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$.
Zbývá tedy nalézt isomorfismus $\mathbf{P}$ tak, aby soustava $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ „byla v hezkém tvaru".

[a] Srovnejte s: rovnice $2x = 7$ má stejnou množinu řešení jako rovnice $3 \cdot 2x = 3 \cdot 7$, protože 3 má inversi.

Definice (ekvivalentní soustavy)

Řekneme, že soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ r rovnic o s neznámých jsou ekvivalentní[a] (značení: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$), když pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

[a] Slogan: Ekvivalentní soustavy stejných rozměrů mají stejná řešení.

Definice (horní blokový tvar matice)

Matice $\mathbf{M}$ je v horním blokovém tvaru, jsou-li splněny následující dvě podmínky:[a]

1. Každý nenulový řádek matice $\mathbf{M}$ je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
2. Každý pivot (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice $\mathbf{M}$ je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

[a] Pozorování: $\mathbf{M}$ je v horním blokovém tvaru iff $(\mathbf{M} \mid \mathbf{o})$ je v horním blokovém tvaru.

Příklad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je v horním blokovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{31} & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{23} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{42} & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

Není v horním blokovém tvaru.

Věta (Gaussova eliminační metoda (GEM) nad $\mathbb{F}$)

Jakoukoli matici $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{F}$ lze konečným počtem tzv. řádkových elementárních úprav převést na horní blokový tvar.
Řádkové elementární úpravy jsou tří typů:

(I) Prohození dvou řádků v matici.

(II) Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem.

(III) Přičtení skalárního násobku řádku matice k jinému řádku matice.

Důkaz.

Nebudeme dělat (viz skripta, Věta 6.3.10.). ∎

Poznámky

GEM: použití řádkových elementárních úprav dané matice s cílem zapsat danou matici v horním blokovém tvaru. Při dosažení tohoto tvaru říkáme, že GEM skončila.

Příklad (prohození dvou řádků v matici)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{array}$$

Tudíž: prohození dvou řádků je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -20 & -5 & -35 & -15 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ -5R_2 \\ R_3 \end{array}$$

Tudíž: vynásobení řádku matice nenulovým skalárem je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (Přičtení skalárního násobku řádku k řádku)

Ať $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ a ať $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 11 & 21 & 28 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_1 \end{array}$$

Tudíž: přičtení skalárního násobku řádku k danému řádku je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Shrnutí

Ať $\mathbf{M}$ je jakákoli nad $\mathbb{F}$ o r řádcích. Potom platí:

1. Každá elementární úprava matice $\mathbf{M}$ je dána součinem $\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ pro vhodný „elementární" isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$.
2. Je-li matice $\mathbf{M}'$ horním blokovým tvarem[a] matice $\mathbf{M}$, pak
   1. Existuje isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ tak, že $\mathbf{M}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_1$, kde k je nějaké přirozené číslo a $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k$ jsou „elementární" isomorfismy.
   2. Platí $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M}')$ a $\operatorname{def}(\mathbf{M}) = \operatorname{def}(\mathbf{M}')$.

Speciálně: pro $\mathbf{M}$ ve tvaru $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ lze elementárními úpravami převést každou soustavu na horní blokový tvar $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$. Navíc platí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$.

[a] Důležité: nikdy jsme neříkali, že při elementárních úpravách lze vyškrtávat nulové řádky. Vyškrtávat nulové řádky při GEM nebudeme; matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ musí mít stejné rozměry!

Důsledky

1. Hodnost matice **M** je rovna počtu pivotů v horním blokovém tvaru po skončení GEM.
2. Pro každou matici **M** platí $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M}^T)$, kde $\mathbf{M}^T$ je transponovaná matice[a] k matici **M**.
3. Defekt matice **M** je roven počtu sloupců matice **M** mínus hodnost matice **M**.

[a] Matice $\mathbf{M}^T$ má jako své sloupce původní řádky matice **M** zapsané ve stejném pořadí. Například pro

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Příklad (ukázka systematického řešení soustavy nad $\mathbb{R}$)

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ (maticově: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$). Pro matici soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ platí rovnosti $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 1$ a $\mathrm{def}(\mathbf{A}) = 2$. Pivot je na první posici: volit budeme vždy druhou a třetí položku, první položku dopočteme.

1. $\mathrm{ker}(\mathbf{A})$ je řešení soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$.

   Báze $\mathrm{ker}(\mathbf{A})$ je $\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Partikulární řešení pro $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Množina všech řešení $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Příklad (geometrický význam postupu řešení soustavy)

Rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ v $\mathbb{R}^3$ popisuje rovinu ρ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Tato rovina ρ je v obecné poloze (rovina ρ neprochází počátkem, protože $2 \neq 0$).

1. Rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$ je paralelní posunutí roviny ρ tak, aby výsledná rovina ρ_h procházela počátkem.

   Báze $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ jádra je systém souřadnic v rovině ρ_h.
2. Partikulární řešení rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ je libovolný bod $\mathbf{p}$ v původní rovině ρ.
3. Zápis $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\})$ obecného řešení vyjadřuje opětovné paralelní posunutí roviny ρ_h zpět do roviny ρ.

Poznámka

Stejnou geometrickou představu je třeba mít pro řešení obecné soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nad $\mathbb{F}$.

Příklad (systematické řešení komplikovanější soustavy nad $\mathbb{R}$)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - R_3 \end{array}$$

Důležité: povšimněme si značení řádkových úprav; úpravy budeme vždy takto vyznačovat.

Příklad (pokrač.)

Po skončení GEM $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ jsou pivoty na čtvrté, druhé a první posici. Tyto položky v řešení budeme dopočítávat, třetí položku řešení budeme volit.

Množina všech řešení je: $\begin{pmatrix} 33/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Vylepšený zápis: $\begin{pmatrix} 33/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Řešením soustavy je přímka v $\mathbb{R}^4$.