Determinant: část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.3 a 8.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Definice determinantu čtvercové matice (s použitím permutací).
2. Základní metody výpočtu determinantu:
   1. Z definice: nutnost znalosti S_n.
   2. Pomocí GEM: nutnost opatrného provádění GEM.
3. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dnešní přednáška

1. Věta o rozvoji determinantu podle sloupce.[a]
2. Hlubší poznatky o determinantu.
3. Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic (Cramerova věta). Ukážeme geometrický význam Cramerovy věty.

[a] Víme: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$. Takže determinant půjde rozvíjet i podle řádku.

Připomenutí

Determinant $\det(\mathbf{A})$ čtvercové matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je lineární v každém sloupci. Speciálně: protože $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathbf{e}_i$ (kde $\mathbf{a}_j$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$), platí rovnost:[a]

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}_{\text{Značení: } A_{ij}.}$$

Například (zvolili jsme $j = 2$, tj. rozvíjíme podle druhého sloupce):

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{22}} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{32}}$$

[a] Této rovnosti se říká (Laplaceův) rozvoj determinantu podle j-tého sloupce.

Definice

Determinantu $A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$ říkáme algebraický doplněk posice (i, j) v matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Věta (praktický výpočet algebraického doplňku)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Označme jako $\mathbf{A}_{ij}$ matici typu $(n-1) \times (n-1)$ vzniklou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Potom[a] $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

[a] Pozor: nezapomeňte na znaménko posice (i, j): $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Lemma 8.3.4 ve skriptech). ∎

Pozorování

Rozvoj determinantu podle sloupce umožňuje rekursivní výpočet determinantu! Důvod: pro $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ jsou algebraické doplňky jedotlivých posic determinanty matic typu $(n-1) \times (n-1)$.

Příklad (determinant rozvojem podle třetího sloupce)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= 0 \cdot \underbrace{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{13}} \\
&+ 6 \cdot \underbrace{(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}} \\
&+ 0 \cdot \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{33}} \\
&+ 5 \cdot \underbrace{(-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{43}}
\end{aligned}
$$

Příklad (přijde vhod u Cramerova pravidla)

Pro $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbf{e}_k$ označme $\mathbf{X}_j = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$.
Spočteme $\det(\mathbf{X}_j)$ rozvojem podle j-tého sloupce:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{X}_j) &= \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \\
&= \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \underbrace{\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)}_{=0 \text{ pro } k \neq j \text{ a } =1 \text{ pro } k = j} \\
&= x_j
\end{aligned}$$

Poznámky k výpočtu determinantu rozvojem podle sloupce

1. Protože $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$, lze determinant počítat i rozvojem podle řádku.
2. Rekursivní výpočet determinantu (tj. výpočet rozvojem podle sloupce nebo řádku) má složitost $n!$ — je tudíž obecně výpočetně pomalý.
3. Výpočet determinantu rozvojem je vhodný pro řídké matice (matice, obsahující hodně nul).

Věta (základní strukturální vlastnosti determinantu)

Funkce $\det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \ldots \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \to \mathbb{F}$ má následující vlastnosti:

1. $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.
2. $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A})$.
3. Pro regulární $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
4. $\det(a \cdot \mathbf{A}) = a^n \cdot \det(\mathbf{A})$, kde a je libovolný skalár.[a]

[a] Pozor: rovnost $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$ obecně neplatí.

Důkaz.

1. Víme z minulé přednášky.
2. Bez důkazu (viz např. Tvrzení 8.2.19 ve skriptech).
3. Pro regulární $\mathbf{A}$ platí rovnosti
   $1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1})$.
   Takže $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
4. Plyne z toho, že determinant je v každém sloupci lineární.

Definice (adjungovaná matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je její adjungovaná matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$.

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ je $\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Věta (Cramerova[a] věta o adjungované matici)

[a] Gabriel Cramer (1704–1752) byl švýcarský matematik.

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Potom platí rovnosti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

Pro regulární $\mathbf{A}$ tedy platí $\mathbf{A}^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz např. ve skriptech, Věta 8.4.3. ■

Příklad (inverse pomocí adjungované matice)

Pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je $\det(\mathbf{A}) = 6$. Víme, že inverse matice $\mathbf{A}$ existuje.

1. Matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$ je $\begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Proto $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Celkově $\mathbf{A}^{-1} = 6^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Doporučení (sanity check)

Při výpočtu $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ je možná rozumné nejprve spočítat matici algebraických doplňků a potom ji transponovat.

Výhodnost a vhodnost výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$

1. Pro obecné (velké) matice je výpočet nevýhodný. Vyžaduje spočítat velké množství determinantů.
2. Pro velké a řídké matice (tj. pro matice obsahující velké množství nulových položek) může jít o výhodný výpočet.
3. Výpočet je výhodný pro matice typu 2×2.
   Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je regulární (tj., ať $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$).
   Potom
   $$\mathbf{A}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = (ad-bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
4. Poznámka: některé aplikace (například v kryptografii) vyžadují práci s maticemi nad ještě obecnější strukturou než je těleso. Pak je výpočet $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ často jediná možnost.

Definice (soustava se čtvercovou maticí)

Rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, říkáme soustava se čtvercovou maticí.

Tvrzení (řešení čtvercové soustavy s regulární maticí)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou maticí. Tato soustava má jediné řešení právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární matice. V tomto případě je toto jediné řešení tvaru $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Důkaz.

Regularita matice $\mathbf{A}$ znamená přesně to, že $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je isomorfismus. To znamená přesně to, že pro každé $\mathbf{b}$ existuje právě jedno $\mathbf{x}$ takové, že $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$. Evidentně platí $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$. ∎

Cramerova věta o řešitelnosti regulárních soustav lineárních rovnic (také: Cramerovo pravidlo)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou regulární maticí nad $\mathbb{F}$. Potom j-tá položka jediného řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je tvaru

$$x_j = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Důkaz.

Označme $\mathbf{X}_j = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Tudíž $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_j = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$, a proto $\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{X}_j) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$.
To znamená $\det(\mathbf{X}_j) = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$.
Ale $\det(\mathbf{X}_j) = x_j$ (např. rozvojem podle j-tého sloupce, viz str. 6 tohoto tématu). ■

Uvedený důkaz je pravděpodobně ten nejelementárnější možný. Pochází z článku Stephen M. Robinson, A short proof of Cramer's rule, *Mathematics Magazine* 43.2 (1970), 94–95.

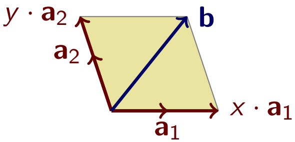
Příklad (použití Cramerova pravidla)

Pro soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{R}$ platí $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$. Lze tedy použít Cramerovo pravidlo.
Jediné řešení má tvar

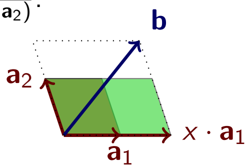
$$\frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-19}{22} \\ \\ \dfrac{15}{22} \end{pmatrix}$$

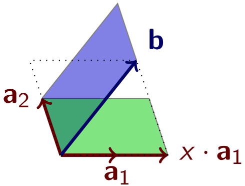
Geometrie Cramerovy věty pro soustavy 2×2 nad $\mathbb{R}$

Pro regulární soustavu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$ platí podle Cramerovy věty $\frac{\det(\mathbf{b},\mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$. Co to opravdu znamená?[a]



Ale $x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$, takže platí $x = \frac{\det(\mathbf{b},\mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}$:





Podobnou úvahu lze provést pro $y = \frac{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}$.

---

[a] Analogicky lze postupovat pro regulární soustavy větších rozměrů a nad libovolným tělesem (musíme ovšem kreslit rovnoběžnostěny).

Příklad (vyřešte nad $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ je parametr)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -p & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & p & -1 \end{array}\right), \ \det(\mathbf{A}) = (p-2)\cdot(p-17).$$

1. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ právě tehdy, když $p \notin \{2, 17\}$.
   V tomto případě existuje jediné řešení. Toto jediné řešení lze nalézt pomocí Cramerovy věty:

$$\frac{1}{(p-2)\cdot(p-17)} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -p & -1 \\ 0 & -7 & -5 \\ -1 & 3 & p \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & -p & 3 \\ 1 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} \dfrac{26}{17-p} \\ \\ \dfrac{3}{17-p} \\ \\ \dfrac{1}{17-p} \end{pmatrix}, \ p \notin \{2, 17\}.$$

Příklad (pokrač.)

2. $p = 2$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$.

   Řešení: $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix})$, pro $p = 2$.

3. $p = 17$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -17 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 17 & -1 \end{array}\right)$.

   Řešení pro $p = 17$ neexistuje (Frobeniova věta).

Doporučení

Pro čtvercové soustavy s parametrem doporučujeme použít kombinaci Cramerovy věty a GEM. Výpočet pak má dvě fáze:

1. Cramerova věta pro ty parametry, pro které je matice soustavy regulární.
2. GEM pro ty parametry, pro které je matice soustavy singulární.