Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí.
2. Matice transformace souřadnic.

Dnešní přednáška

1. Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.
   Zjistíme, pro které vektory $\vec{x}$ platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ (tzv homotetie — to je to nejjednodušší lineární zobrazení z L do L).
2. Budeme se snažit změnit bázi L tak, aby ve směrech vektorů nové báze bylo zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ homotetií (obecně pro každý směr různou). Ne vždy to půjde.

Příští přednáška

1. Diagonalisace matic nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.
2. Dvě aplikace diagonalisace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.[a]

[a] Tyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Příklad (equilibrium stochastických procesů)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezněte alespoň jeden nenulový vektor $\mathbf{q}$ tak, aby platila rovnost[a] $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$.

To je snadné: $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože řádkové součty matice $\mathbf{A}$ jsou 1. Tudíž $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[a] Stejnou (ale komplikovaněji zadanou) úlohu řeší algoritmus `PageRank`, viz například K. Bryan a A. Leise, The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581, nebo Dodatek F skript.

Co dělat pro obecnou matici A?

Měli jsme štěstí („hezký“ tvar matice $\mathbf{A}$, takovým maticím se říká řádkově stochastické). Jak ale postupovat pro obecnou matici $\mathbf{A}$?

Příklad (equilibrium stochastických procesů, znovu a jinak)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezneme všechna nenulová řešení všech soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je neznámé.

Přepsáním soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ na $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ zjistíme, co je třeba udělat:

1. Matice $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2$ musí být singulární. Jedině tehdy bude mít rovnice $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ nenulové řešení.

   To jest: hledáme všechna λ taková, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

   To znamená vyřešit rovnici $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

2. Pro konkrétní hodnoty λ nalezneme nenulové řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pomocí GEM.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

$$\det(\mathbf{A}-x\cdot\mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 0.3-x & 0.7 \\ 0.8 & 0.2-x \end{vmatrix} = (0.3-x)\cdot(0.2-x)-0.56 =$$
$$= x^2 - 0.5x - 0.5 = (x-1)\cdot(x+0.5) = 0.$$

Soustava $(\mathbf{A} - x\cdot\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$ pro

1. $x = 1$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & -0.8 & 0 \end{array}\right)$ a řešení[a] $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

   To znamená: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

2. $x = -0.5$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 \end{array}\right)$ a řešení[b] $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$.

   To znamená: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = -0.5\cdot\mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$.

---

[a] To jsme již věděli.

[b] To je nová informace.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

Co jsme se vlastně dozvěděli a k čemu je to dobré?

1. V souřadnicovém systému $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$ se matice $\mathbf{A}$ stane diagonální maticí $D(1; -0.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

   Opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1;-0.5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

   tudíž

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1;-0.5)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

2. Díky předchozímu vidíme, že zadáme-li rekurentní proces

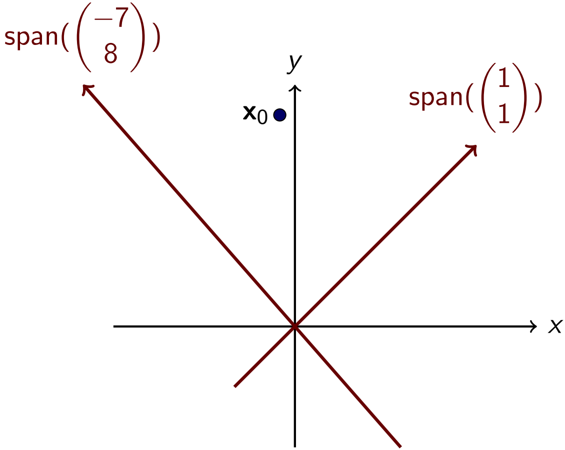
$$\mathbf{x}_0 \text{ libovolný vektor z } \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1},\ k \geq 0,$$

pak se posloupnost vektorů $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ chová následovně:

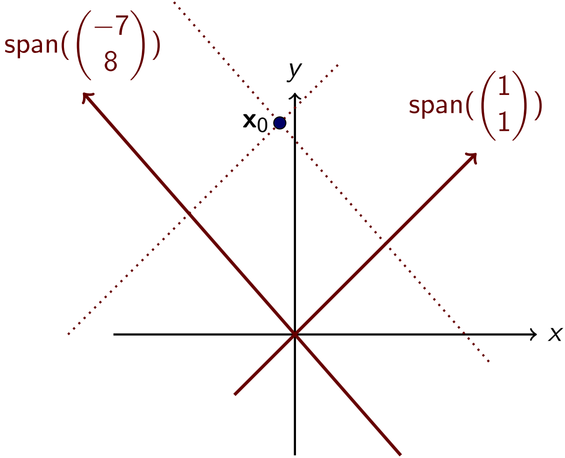
1. Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \ldots$
2. Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce $\mathrm{span}(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix})$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0$, $-0.5 \cdot \mathbf{x}_0$, $(-0.5)^2 \cdot \mathbf{x}_0$, $(-0.5)^3 \cdot \mathbf{x}_0, \ldots$
3. Je-li $\mathbf{x}_0 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, tedy jestliže platí rovnost $\mathbf{coord}_B(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{coord}_B(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} a \\ (-0.5)^n \cdot b \end{pmatrix}$.

Diagonalisací matice $\mathbf{A}$ tedy získáváme o rekurentním procesu úplný přehled.

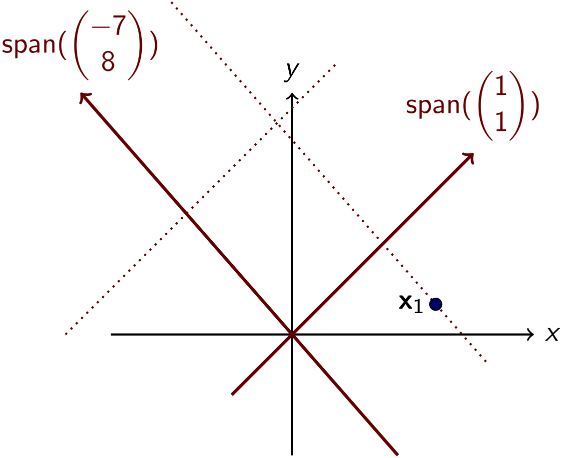
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



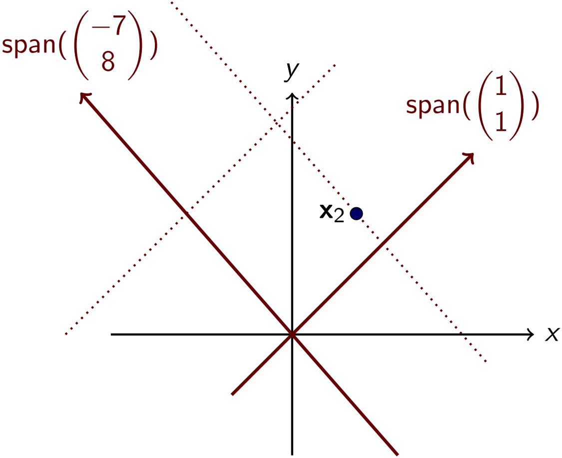
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Shrnutí dosavadních úvah

1. Pokud pro obecnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ najdeme bázi B, ve které $\mathbf{A}$ je diagonální maticí, získáme v nové bázi úplný přehled o maticích tvaru $\mathbf{A}^k$, kde $k \geq 0$.

   To je důležité například v následujících oblastech:

   1. Teorie dynamických systémů.
   2. Ekonomie (například tzv. Leontiefův input-output model).
   3. Složitost rekursivních algoritmů (řešení rekurentních rovnic, viz příští přednášku).
   4. Geometrie kvadratických útvarů, viz kapitolu 14.1 skript.
   5. Funkce matic, viz příští přednášku.
   6. Atd.

   Hledání diagonální matice k matici $\mathbf{A}$ se říká diagonalisace matice $\mathbf{A}$. Ne vždy zadanou matici diagonalisovat půjde.

2. Problém diagonalisace lze zformulovat (a řešit) pro obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.

Definice

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ je λ v $\mathbb{F}$ vlastní hodnotou (také: vlastním číslem), pokud existuje nenulový vektor $\vec{x}$, splňující rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

Každému takovému nenulovému vektoru $\vec{x}$ říkáme vlastní vektor příslušný hodnotě λ.

Pozorování

Ať $\mathbf{f} : L \to L$ je lineární zobrazení.

1. Pro libovolné λ v $\mathbb{F}$ platí: $\{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\} = \ker(\mathbf{f} - \lambda \cdot \mathbf{id})$. Tudíž vlastní vektory příslušné hodnotě λ tvoří podprostor L.[a]
2. λ je vlastní hodnota $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$ je netriviální prostor.

[a] Říkáme mu vlastní podprostor příslušný λ, značíme jej $\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$. Důvod: vlastní hodnotě se říká eigenvalue, vlastnímu vektoru eigenvector, vlastnímu podprostoru eigenspace. Německy: eigen=vlastní.

Připomenutí (základní vlastnosti podobnosti matic)

Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si podobné (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Podobné matice jsou maticemi stejného lineárního zobrazení, ale vzhledem k jiné bázi.

Platí:

1. $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$.
2. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
3. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$, potom $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$.

Definice (charakteristický polynom čtvercové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Výrazu $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)$ říkáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ (značení: $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$).

Poznámky (pro matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$)

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je polynom stupně n. Tudíž má v $\mathbb{F}$ nanejvýš n kořenů (i s násobnostmi). Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ nemá polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ v $\mathbb{R}$ žádný kořen.
2. Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x)$.[a]
   Důvod:

$$\det(\mathbf{B} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}x\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1})\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n).$$

[a] Pozor: obrácená implikace neplatí, viz dále.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L \to L$ je lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. Označme jako $\mathbf{A_f}$ matici $\mathbf{f}$ vzhledem k jakékoli bázi prostoru L. Potom λ v $\mathbb{F}$ je vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\det(\mathbf{A_f} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$.

Důkaz.

Protože L má dimensi n, je λ vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\operatorname{def}(\mathbf{f} - \lambda \mathbf{id}) > 0$. To nastane právě tehdy, když matice $\mathbf{A_f} - \lambda \mathbf{E}_n$ je singulární. ∎

Poznámka

Předchozí tvrzení nezávisí na volbě báze prostoru L a tím pádem nezávisí na volbě matice $\mathbf{A_f}$.
Připomenutí: změnou báze změníme matici $\mathbf{A_f}$ na matici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Příklad (matice mohou mít stejné vlastní hodnoty, ale různé vlastní podprostory)

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad $\mathbb{R}$.

Potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

1. Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:

$$\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

2. Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:

$$\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A}) = \mathsf{ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Příklad (pokrač.)

Pozor! Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ je $\mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$. Ale $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.

Tedy: $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejná vlastní čísla (i s násobnostmi), ale různé vlastní podprostory.

Problém diagonalisace

Pro matici **A** typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ chceme rozhodnout, zda $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$ je diagonální matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nebo ve sloupcovém zápisu

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2, \lambda_3 \cdot \mathbf{e}_3, \ldots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n)$$

Myšlenka nalezení matic $\mathbf{T}$ a $\mathbf{D}$ v rovnici $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$

Ať $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$.

1. Rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ platí právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ a matice $\mathbf{T}$ je regulární.
2. Pro regulární matici $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ právě tehdy, když platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$.

Shrnuto: rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathbf{T}^{-1}$ platí právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$.
  To jest: j-tý sloupec $\mathbf{t}_j$ matice $\mathbf{T}$ je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_j matice $\mathbf{A}$.
- Matice $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ je regulární.

Pozorování

Dva vlastní vektory, příslušející dvěma různým vlastním hodnotám, jsou lineárně nezávislé.
Platí-li

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_1} = \lambda_{j_1} \cdot \mathbf{t}_{j_1} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{t}_{j_2}$$

pak z rovnosti $a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \mathbf{o}$ plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{o} \\ &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot (a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2}) \\ &= a_1 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_1}}_{\neq \mathbf{o}} + a_2 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_2}}_{= \mathbf{o}} \end{aligned}$$

tedy $a_1 = 0$.
Rovnost $a_2 = 0$ se dokáže analogicky.

Problém

Existuje dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů pro stejnou vlastní hodnotu?

Věta (charakterisace diagonalisovatelných matic nad $\mathbb{F}$)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{A}$ je diagonalisovatelná, tj $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
2. Charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze v $\mathbb{F}$ rozložit na součin lineárních faktorů a platí: násobnost λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.[a]

[a] Násobnosti λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ se někdy říká algebraická násobnost λ, číslu $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$ se někdy říká geometrická násobnost λ.

Důkaz.

Bez důkazu (nemáme vybudovanou teorii polynomů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$). Pro zájemce: Věta 10.4.8 skript. ∎

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ splňují:

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.
2. Protože $\dim(\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2$ a $\dim(\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A})) = 1$, platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
3. Protože $\dim(\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})) = 1$ a $\dim(\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$, neplatí $\mathbf{B} \approx \mathbf{D}$ pro žádnou diagonální matici $\mathbf{D}$.

Ukázali jsme (mimo jiné): $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$, přestože $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x)$.

Příklad

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ platí $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$

a $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, kde $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{A}$ v kanonické bázi odpovídá lineárnímu zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y + 2z \\ -x + 4y - z \\ -4x + 4y - z \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ jde o podstatně jednodušší zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix}$$