Jordanův tvar

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 11.1 a 11.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí lze (za určitých předpokladů) diagonalisovat.
2. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí diagonalisovat nelze.

Dnešní přednáška

1. Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.
   Vysvětlíme, co je Jordanův tvar zobrazení $\mathbf{f}$.[a]
   Půjde o tvar: $\mathbf{f}$ = diagonální + nilpotentní.
   Nilpotentní = „téměř nulové zobrazení“.
   To znamená: Jordanův tvar = „téměř diagonální tvar“.

---

[a] Jde o velmi technickou partii lineární algebry. Některé důkazy tudíž neuvedeme. Důkazy všech tvrzení naleznete v Kapitole 11 skript.
Zkouška: výpočet Jordanova tvaru nebude v písemné části (mohou tam ale být nilpotentní matice), u ústní části mohou být vyžadovány pouze hlavní myšlenky Jordanova tvaru (viz str 8 a 9 tohoto tématu).

Motivační příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ jsou nad $\mathbb{R}$. Potom:

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = (x-4)^2 \cdot (x-9)$, kořeny $\lambda_{1,2} = 4$ násobnosti 2 a $\lambda_3 = 9$ násobnosti 1.
2. $\mathrm{eigen}(4; \mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\mathrm{eigen}(9; \mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$.
3. $\mathrm{eigen}(4; \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1)$, $\mathrm{eigen}(9; \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$.

Závěry:

1. $\mathbf{A}$ je diagonalisovatelná a $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na
$$\mathrm{eigen}(4; \mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad \text{a} \quad \mathrm{eigen}(9; \mathbf{A}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$$
2. $\mathbf{B}$ není diagonalisovatelná a $\mathbb{R}^3$ se „nerozkládá“ na
$$\mathrm{eigen}(4; \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1) \quad \text{a} \quad \mathrm{eigen}(9; \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$$
Důvod: je málo vlastních vektorů pro $\lambda_{1,2} = 4$.

Motivační příklad (pokrač.)

Matice $\mathbf{B}$ se „příliš neliší“ od diagonalisovatelné matice, protože

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tzn. „chyba $\mathbf{N}$ je malá řádu 2“.

Dá se $\mathrm{eigen}(4; \mathbf{B})$ „zvětšit“ na prostor dimense 2?

Jak zobecnit pojem vlastního vektoru, aby vlastní podprostor $\mathrm{eigen}(4; \mathbf{B}) = \ker(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)$ zvětšil dimensi?

Zobecnění vlastního vektoru pro $\lambda_{1,2} = 4$ a matici $\mathbf{B}$

Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ se evidentně v rovině $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ děje něco, co souvisí s číslem 4:

1. $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{o}$, protože $\mathbf{e}_1$ je vlastní vektor $\mathbf{B}$, příslušný vlastní hodnotě 4.
2. $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{o}$, protože $\mathbf{e}_2$ není vlastní vektor $\mathbf{B}$, příslušný vlastní hodnotě 4.
3. To ale znamená, že $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{o}$. Takže $\mathbf{e}_2$ je „zobecněný vlastní vektor řádu 2“ pro vlastní hodnotu 4.

Celkově: $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \ker((\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2)$, tj., $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je „vlastní podprostor řádu 2“ a prostor $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na

$$\ker((\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2) \quad \text{a} \quad \underbrace{\ker((\mathbf{B} - 9 \cdot \mathbf{E}_3)^1)}_{=\mathrm{eigen}(9;\mathbf{B})}$$

Funguje myšlenka zobecněných vlastních podprostorů také pro matici A?

Ano: prostor $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na

$$\underbrace{\ker((\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2)}_{=\mathrm{eigen}(4;\mathbf{A})} \quad \text{a} \quad \underbrace{\ker((\mathbf{A} - 9 \cdot \mathbf{E}_3)^1)}_{=\mathrm{eigen}(9;\mathbf{A})}$$

protože

$$(\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

a tudíž

$$\ker((\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2) = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathrm{eigen}(4; \mathbf{A})$$

Další analýza matic A a B

1. $$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}}.$$

   Existuje k tak, že $\mathbf{N}^k$ je nulová matice (zvolte $k = 1$) a platí rovnost $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$.

2. $$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}}.$$

   Existuje k tak, že $\mathbf{N}^k$ je nulová matice (zvolte $k = 2$) a platí rovnost $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$.

Hlavní myšlenky Jordanova[a] tvaru

[a]Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922) byl francouzský matematik.

Jordanův tvar lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ je součet $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$, kde

1. $\mathbf{f}_{\mathrm{diag}}$ je diagonalisovatelné.
2. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$ se „příliš neliší" od nulového zobrazení $\mathbf{o}$. Přesněji: $(\mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^k = \mathbf{o}$ pro nějaké přirozené číslo k.
3. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$.

Namísto Jordanova tvaru lineárního zobrazení hledáme většinou Jordanův tvar jeho matice.

V určité bázi (které se říká Jordanova báze) bude tedy matice mít „téměř diagonální tvar".

Uvedeme pouze příklady a nenaučíme se hledat Jordanovu bázi.[a]

Výpočty jsou technické, více se lze dočíst v Kapitole 11 skript.

[a]To jest: bázi zobecněných vlastních podprostorů.

K čemu je to dobré?

Budeme moci počítat mocniny[a]

$$\mathbf{f}^m = (\mathbf{f}_{\text{diag}} + \mathbf{f}_{\text{nil}})^m$$

Protože $\mathbf{f}_{\text{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\text{nil}} = \mathbf{f}_{\text{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\text{diag}}$, lze použít binomickou větu,[b] tj.,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}_{\text{diag}} + \mathbf{f}_{\text{nil}})^m &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\text{diag}})^j}_{\text{snadné}} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\text{nil}})^{m-j}}_{=\mathbf{o} \text{ pro } m-j \geq k} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} \cdot (\mathbf{f}_{\text{diag}})^j \cdot (\mathbf{f}_{\text{nil}})^{m-j}
\end{aligned}$$

[a] To je v nejrůznějších aplikacích velmi důležité, viz téma 08B.

[b] Pozor: pro obecná lineární zobrazení binomická věta neplatí. Například pro matice $n \times n$ platí rovnost $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$, ale rovnost $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ platí pouze, pokud $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Připomenutí značení

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ značíme $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}_L$ a $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^k$ pro $k \geq 0$.

Definice (nilpotentní zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, pro které existuje přirozené číslo k tak, že $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$, říkáme nilpotentní. Nejmenšímu takovému číslu k říkáme index nilpotence a značíme jej $\mathrm{nil}(\mathbf{f})$.

Poznámka

Protože $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}_L$, je index nilpotence $\mathbf{f}$ „téměř vždy" větší než 0. Jediné zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, pro které je $\mathrm{nil}(\mathbf{f}) = 0$, je $\mathbf{f} = \mathbf{id}_L = \mathbf{o}$ pro $L = \{\vec{o}\}$.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, platí $\operatorname{nil}(\mathbf{N}) = 3$.
Pojďme „stopovat“ cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{o}$$

Všechny čtyři bázové vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice $\mathbf{N}$ je nilpotentní. Navíc $\operatorname{nil}(\mathbf{N})$ je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj. $\operatorname{nil}(\mathbf{N})$ je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je nilpotentní: její řetězce jsou

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & & & \\ \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & \\ \mathbf{e}_3 & \mapsto & 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} \end{array}$$

a proto platí $\mathrm{nil}(\mathbf{N}) = 3$.

Definice

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme Jordanova buňka.[a]

[a] Buňka v této definici má rozměry $n \times n$.

Pozorování

Každá Jordanova buňka je nilpotentní matice. Index nilpotence je roven rozměrům buňky.

Nalezení Jordanova tvaru matice M $: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

1. Spočteme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice $\mathbf{M}$.
    1. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ nelze v $\mathbb{F}[x]$ rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ neexistuje.
    2. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ existuje a my postupujeme podle dalších bodů.
2. Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Segment $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
3. Nalezení i-tého segmentu $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$:
    1. Utvoříme nilpotentní matici $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$. a nalezneme její Jordanův tvar $\mathbf{N}_i$.
    2. Platí $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$.
4. Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ jakožto blokově diagonální matici.

Příklad

Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ nalezneme její Jordanův tvar.

1. Platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x-2)^4(x+1)^2$.
   Jordanův tvar $\mathbf{M}$ bude mít dva Jordanovy segmenty:
   1. Segment $\mathbf{B}_1(2)$ velikosti 4×4, protože násobnost 2 jako kořene charakteristické rovnice je 4.
   2. Segment $\mathbf{B}_2(-1)$ velikosti 2×2, protože násobnost -1 jako kořene charakteristické rovnice je 2.

Příklad (pokrač.)

2. Celkově: Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ je

$$\mathbf{M} \approx \left(\begin{array}{cccc||cc} \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Příklad

Připomenutí: pro čtvercovou matici $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) lze definovat

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!}$$

a výsledkem je opět čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$).
Navíc: pro funkci $t \mapsto \exp(t\mathbf{X})$ reálné proměnné platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \exp(t\mathbf{X})$$

a to umožňuje elegantně řešit soustavy lineárních diferencálních prvního řádu s konstantními koeficienty, viz Dodatek O skript.

Matici $\exp(t\mathbf{X})$ lze snadno spočítat, známe-li Jordanův tvar matice $\mathbf{X}$.

Příklad (pokrač.)

Například: víme, že platí

$$t\mathbf{M} \approx t\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\text{diag}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\text{nil}}}$$

pro každé t z $\mathbb{R}$.

Příklad (pokrač.)

To znamená, že[a]

$$\exp(t\mathbf{M}) \approx \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}} + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}})$$

$$= \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot (\mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

[a] Rovnost $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B})$ platí pouze tehdy, když $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Exponenciála diagonální matice se počítá snadno. Exponenciála nilpotentní matice se počítá v konečně krocích. V našem případě platí $\mathrm{nil}(\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = 3$, proto $\exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2$.