Metrické výpočty v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.3 a B.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Víme, co je afinní podprostor dimense d v prostoru $\mathbb{R}^n$.

   Připomenutí: jde o množinu $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor dimense d v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je vektor v $\mathbb{R}^n$.

2. Pro dva afinní podprostory $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v $\mathbb{R}^n$ umíme rozhodnout, zda jsou rovnoběžné, nebo různoběžné, nebo mimoběžné.

3. Víme, co je vektorový součin[a] $\times(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ seznamu vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.

   Připomenutí:

   1. Rovnost $\langle \times(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x})$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.
   2. Platí rovnost $\|\times(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})\| = \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})}$.

[a] Prostor $\mathbb{R}^n$ je vybaven standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Dnešní přednáška

Pro dva afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním[a] skalárním součinem spočteme jejich vzájemnou vzdálenost.

Připomenutí:

1. $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ je standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
2. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$ je norma v $\mathbb{R}^n$, vytvořená standardním skalárním součinem a pro $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ standardní eukleidovská vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$.

[a] Vše lze zobecnit pro obecný metrický tensor $\mathbf{G}$ v $\mathbb{R}^n$. To dělat nebudeme.

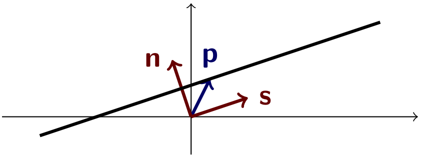
Příklad (dva různé zápisy jedné přímky)

Dva zápisy téže přímky v $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}_{\text{parametrický zápis}} \qquad \underbrace{-x + 3y = 5}_{\text{rovnicový zápis}}$$

Oba typy zápisu jsme již potkali při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (-1\ 3 \mid 5)$$



Získáváme informace o směrovém vektoru a normálovém vektoru.[a]

[a] Připomenutí: v $\mathbb{R}^2$ je standardní skalární součin.

Tvrzení (Existence parametrického a normálového zápisu)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ je d-dimensionální afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom existují dvě matice[a] $\mathbf{S} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{N}^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ tak, že platí:

1. Platí $\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$, $\mathrm{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = d$, tj. $\mathbf{S}$ je monomorfismus a $\mathbf{N}^T$ je epimorfismus.
2. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ pro jednoznačně určené $\mathbf{t}$.
3. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

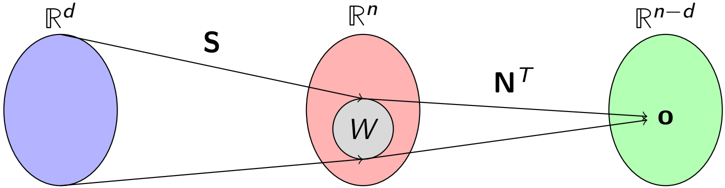
---

[a] Terminologie: $\mathbf{S}$ je směrová matice a $\mathbf{N}$ je normálová matice lineárního podprostoru W. Zápisu $\mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ říkáme parametrický zápis, zápisu $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ normálový zápis afinního prostoru $\boldsymbol{\pi}$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámky

1. 

$$\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$$

Pozor: musí platit rovnosti $\mathrm{def}(\mathbf{S}) = 0$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$.

2. Proč píšeme normálový zápis ve tvaru $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$?
   1. Ihned vidíme, že afinní podprostor prochází bodem $\mathbf{p}$.
   2. Označme $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-d})$. Pak rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ je ekvivalentní rovnostem[a] $\langle \mathbf{n}_1 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{n}_2 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$, ..., $\langle \mathbf{n}_{n-d} \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$. Tudíž: sloupce matice $\mathbf{N}$ tvoří seznam lineárně nezávislých „normál“ příslušného afinního podprostoru.

[a] Připomenutí: $\mathbb{R}^n$ je vybaven standardním skalárním součinem.

Ortogonální doplněk lineárního podprostoru

Ať W je lineární podprostor dimense d prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním[a] skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Označme jako $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d)$ a $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-d})$ směrovou, resp. normálovou matici podprostoru W.

Potom platí

$$\mathbb{R}^d \xrightarrow[\text{mono}]{\mathbf{S}} \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{epi}]{\mathbf{N}^T} \mathbb{R}^{n-d}$$

$$\mathbb{R}^d \xleftarrow[\text{epi}]{\mathbf{S}^T} \mathbb{R}^n \xleftarrow[\text{mono}]{\mathbf{N}} \mathbb{R}^{n-d}$$

kde $\mathrm{im}(\mathbf{N}) = \ker(\mathbf{S}^T)$. Této společné hodnotě říkáme ortogonální doplněk podprostoru W a značíme $W^\perp$.

[a] Analogické úvahy lze provést pro $\mathbb{R}^n$ s obecným metrickým tensorem $\mathbf{G}$.

Jednoduché a užitečné rovnosti

Pro lineární podprostor W a pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí rovnosti

$$\|\mathrm{rej}_W(\mathbf{x})\| = \|\mathrm{proj}_{W^\perp}(\mathbf{x})\| \qquad \|\mathrm{proj}_W(\mathbf{x})\| = \|\mathrm{rej}_{W^\perp}(\mathbf{x})\|$$

Definice

Ať $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu[a]

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \inf\Big\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}' \in \boldsymbol{\pi}' \Big\}$$

říkáme vzájemná vzdálenost $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

[a] Z definice vzájemné vzdálenosti ihned plyne, že $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi})$.

Poznámky k definici

1. Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ není definice příliš zajímavá.
   1. $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{o}\}$, proto pro jakákoli $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ platí $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = 0$.
   2. Prostor $\mathbb{R}^1$ má jako afinní podprostory buď body nebo celé $\mathbb{R}^1$. To znamená $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|$, nebo $\omega(\mathbf{p}, \mathbb{R}) = \omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 0$.
2. V obecném $\mathbb{R}^n$ víme: $\Big\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}' \in \boldsymbol{\pi}' \Big\}$ je neprázdná a zdola omezená množina reálných čísel. Tudíž její infimum existuje a reálné číslo $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ je korektně definováno.

Problém: jak spočítat hodnotu $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ v obecném $\mathbb{R}^n$?

Věta (výpočet vzáj. vzdálenosti dvou afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom platí:[a]

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathrm{proj}_{(W \vee W')^\perp}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

[a] Protože $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi})$, je také $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$.

Hlavní myšlenky důkazu (u zkoušky budou požadovány pouze tyto myšlenky)

1. Vzdálenost $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ by měla být délka kolmé příčky prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.
   Tak je tomu v $\mathbb{R}^2$ při výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžek.
   Obecný případ by měl dopadnout analogicky.
2. Obecně: kolmá příčka k $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ má směr $V = (W \vee W')^\perp$.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

3. Najdeme[a] body $\mathbf{x}_0$ v π a $\mathbf{x}_0'$ v π' tak, že platí rovnost[b] $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' = \mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

   To znamená, že $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' \in V$, proto $\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}_0' + V$ je hledaná kolmá příčka π, π', procházející body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_0'$.

---

[a] To je mírně technické (nikoli těžké): viz důkaz Věty B.3.3 skript.

[b] Podle definice V platí také $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0' = \mathrm{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Toho v dalších výpočtech několikrát využijeme.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

5. Pro jakékoli $\mathbf{x}$ v π a jakékoli $\mathbf{x}'$ v π' platí

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

Proto podle Pythagorovy věty[a] platí

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$$

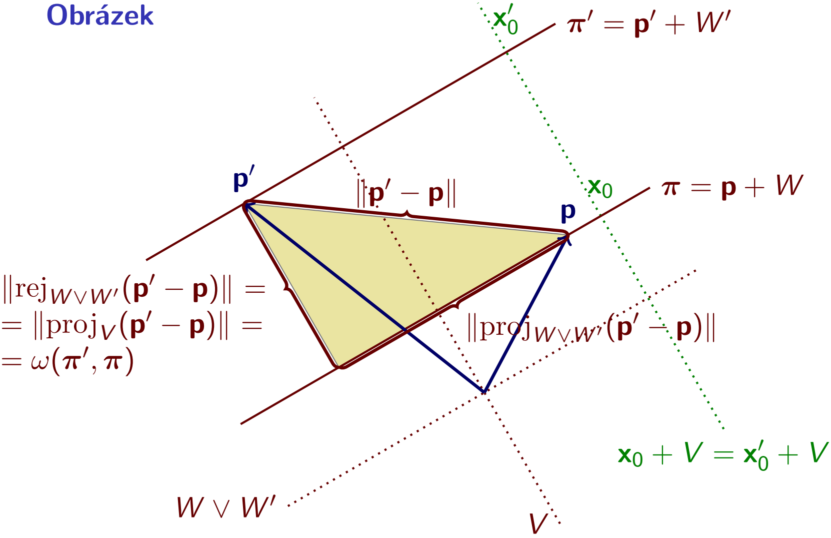
a tedy $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2$, neboli

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

To znamená, že platí[b] $\omega(\pi, \pi') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. ■

[a] Z definice V platí $\langle \mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0 \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rangle = 0$.
[b] Podle definice V platí také $\omega(\pi, \pi') = \|\mathrm{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$.

Obrázek


$\mathbf{x}_0'$
$\pi' = \mathbf{p}' + W'$
$\mathbf{p}'$
$\|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|$
$\mathbf{x}_0$
$\pi = \mathbf{p} + W$
$\mathbf{p}$
$\|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| =$
$= \|\mathrm{proj}_V(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| =$
$= \omega(\pi', \pi)$
$\|\mathrm{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$
$\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}_0' + V$
$W \vee W'$
V

Poznámky

1. Vzorec $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ platí v $\mathbb{R}^n$ s libovolným skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$, který vytváří normu $\| - \|$.

   Důkaz hlavní věty totiž nikde nevyužívá, že skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ je standardní.

   Jediné, co důkaz vyžaduje, je pojem ortogonální rejekce a platnost Pythagorovy věty.[a]

2. V dalším se omezíme na standardní skalární součin v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

   Tam jsou příslušné vzorce pro vzájemnou vzdálenost dvou afinních podprostorů poměrně snadno pochopitelné.

---

[a] Připomenutí: ortogonální projekce umíme počítat pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$, vzorce jsou však poněkud barokní. Takže, pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$, umíme počítat (barokním způsobem) i ortogonální rejekce. Pythagorova věta platí pro libovolný skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Důležité upozornění

Ve zbytku přednášky odvodíme celou řadu vzorců pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ se standardními skalárními součiny. Tyto vzorce nebudou zkoušeny stylem: *Napište vzorec pro vzdálenost bodu od přímky v* $\mathbb{R}^3$, atd.

Bude vyžadováno:

1. Znát obecný vzorec $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ a znát hlavní myšlenky jeho odvození z předchozích stran.
2. Z přednášky o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích znát vzorec
$$\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}$$
pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^n$. Viz následující stranu.
3. Tvůrčí uplatnění výše uvedeného vzorce v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

Připomenutí (přednáška o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích)

V $\mathbb{R}^n$ pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ platí

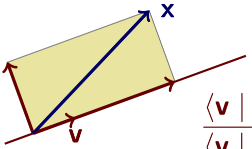
$$\|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \right| \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$$

a tudíž

$$\|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\|$$

$$\underbrace{\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}}$$

ortogonální rejekce osou $\mathbf{v}$



$$\underbrace{\frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}}$$

ortogonální projekce na osu $\mathbf{v}$

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$

1. Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s})$. V tomto případě je[a]
   1. $W \vee W' = \mathrm{span}(\mathbf{s})$.
   2. $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \left\|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s}\right\|$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \mathrm{span}(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{s}})$ je tedy $\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$ rovno

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \ldots = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

---

[a] Tento vzorec není příliš „hezký“. Lepší postup: definujte $\mathbf{n} = \times(\mathbf{s})$ a pracujte s přímkou $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. Viz další příklad.

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$ (pokrač.)

2. Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x}-\mathbf{p})=0$. V tomto případě je
   1. $V=\operatorname{span}(\mathbf{n})$.
   2. Neznáme směr $\mathbf{s}$ zadané přímky, ale platí $\omega(\mathbf{p}',\boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\operatorname{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\operatorname{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\| = \dfrac{|\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{p}'-\mathbf{p}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$ $= \dfrac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}'-\mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \dfrac{|\mathbf{n}^T\mathbf{p}'-\mathbf{n}^T\mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$

Pro $\mathbf{p}'=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ a přímku $\boldsymbol{\pi}$ zadanou rovnicí[a] $\underbrace{-6x+3y}_{=\mathbf{n}^T\mathbf{x}} = \underbrace{-18}_{=\mathbf{n}^T\mathbf{p}}$ je tedy $\omega(\mathbf{p}',\boldsymbol{\pi})$ rovno

$$\frac{\left|-6\cdot 2+3\cdot 4+18\right|}{\sqrt{45}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

[a] Jde o stejnou přímku, jako v minulém příkladu.

Vzdálenost dvou přímek v $\mathbb{R}^2$

Jsou zadány přímky $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s})$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathsf{span}(\mathbf{s}')$.

1. $\mathsf{span}(\mathbf{s}) \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}') =$
$$\begin{cases} = \mathsf{span}(\mathbf{s}), & \text{jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně závislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \boldsymbol{\pi} \text{ a } \boldsymbol{\pi}' \text{ rovnoběžné} \\ = \mathbb{R}^2, & \text{jsou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně nezávislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \boldsymbol{\pi} \text{ a } \boldsymbol{\pi}' \text{ různoběžné} \end{cases}$$
2. Pokud $\mathsf{span}(\mathbf{s}) \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}') = \mathsf{span}(\mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$$
Vzdálenost bodu od přímky již umíme počítat.
3. Pokud $\mathsf{span}(\mathbf{s}) \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}') = \mathbb{R}^2$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^3$

Je dán bod $\mathbf{p}'$ a přímka $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s})$. Potom

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

$$= \left\|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s}\right\|$$

což je formálně stejný vzorec jako v $\mathbb{R}^2$.

Je-li přímka $\boldsymbol{\pi}$ zadána rovnicově jako $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$, kde $\mathrm{rank}(\mathbf{N}) = 2$, pak $V = \mathrm{im}(\mathbf{N})$. Proto

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\mathbf{N})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{N}(\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

Leckdy je lepší postup je vyřešit soustavu $\mathbf{N}^T\mathbf{x} = \mathbf{N}^T\mathbf{p}$, získat tak $\boldsymbol{\pi}$ v parametrickém tvaru a použít výše uvedený vzorec.

Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{R}^3$

Pro vzdálenost bodu $\mathbf{p}'$ od roviny $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ platí

$$\omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T\mathbf{p}' - \mathbf{n}^T\mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

kde jsme využili toho, že $\mathbf{n}$ je normála roviny $\boldsymbol{\pi}$.

Získáváme tak formálně stejný vzorec jako pro vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$.

Je-li rovina $\boldsymbol{\pi}$ zadána jako $\mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je vhodné spočítat[a] $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ a použít předchozí postup pro rovinu $\boldsymbol{\pi}$ ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$.

---

[a] Připomenutí mnemotechniky: $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \mathbf{e}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \mathbf{e}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$.

Vzdálenost přímky od roviny v $\mathbb{R}^3$

Ať $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathrm{span}(\mathbf{s}')$ je přímka a $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ je rovina. Platí

$$\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{pokud } \mathbf{s}', \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \text{ jsou lineárně nezávislé,} \\ & \text{tj., pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou různoběžné,} \\ \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), & \text{pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

1. Je-li $\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbb{R}^3$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

2. Je-li $\mathrm{span}(\mathbf{s}') \vee \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\mathrm{span}(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$
$$= \frac{|\langle \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix})$ a $\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Protože $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, jsou π a π' rovnoběžné.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})}} = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 56 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}} = \frac{118}{\sqrt{684}} \approx 4.51$$

Vzdálenost přímky od přímky v $\mathbb{R}^3$

Ať $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathsf{span}(\mathbf{s}')$ a $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s})$ jsou přímky.
Platí

$$\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \mathsf{span}(\mathbf{s}), & \text{pokud } \mathbf{s}' \text{ a } \mathbf{s}\text{, jsou lineárně závislé} \\ & \text{tj., pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ jsou rovnoběžné,} \\ \mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s}), & \text{pokud } \boldsymbol{\pi}' \text{ a } \boldsymbol{\pi} \text{ nejsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

1. Je-li $\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \mathsf{span}(\mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \omega(\mathbf{p}', \boldsymbol{\pi})$$
a vzdálenost bodu od přímky už umíme počítat.
2. Je-li $\mathsf{span}(\mathbf{s}') \vee \mathsf{span}(\mathbf{s}) = \mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})$, je
$$\omega(\boldsymbol{\pi}', \boldsymbol{\pi}) = \|\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{s}' \times \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$
$$= \frac{|\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}' \times \mathbf{s}\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Přímky $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ zjevně nejsou rovnoběžné.

Platí

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\mathrm{Gram}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.183$$