

Lineární prostory nad $\mathbb{R}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co je definice?

Co je hypotéza?

Co je (matematická) věta? Lemma? Tvrzení?

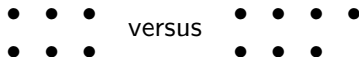
Co je důkaz?

Více např. v textech

- 1 J. Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*
- 2 J. Velebil, *Sbírka problémů z lineární algebry*

Co je definice?

Vysvětlíme na pojmu **sudost**: některá přirozená čísla lze „seřadit do dvojic“, některá přirozená čísla „seřadit do dvojic“ nejdou:



Definice

Ať x je přirozené číslo.^a Řekneme, že x je **sudé**,^b pokud platí rovnost $x = 2k$ pro nějaké přirozené číslo k .

^aNula **je** přirozené číslo.

^bSlovo **sudé** znamená ve staročeštině **složený ze dvou dílů**.

Důležité poznámky

- 1 Definice jsou psány českými oznamovacími větami.
- 2 Každá definice obsahuje dvě části: **pojmenování pojmu** a **charakteristickou vlastnost pojmu**.
- 3 U definice **nedává smysl** mluvit o její „pravdivosti“ či „nepravdivosti“.

Co je hypotéza?

Hypotéza 1

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x + 3$ je sudé přirozené číslo.

Hypotéza 2

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x + 6$ je sudé přirozené číslo.

Důležité poznámky

- 1 Hypotézy jsou psány českými oznamovacími větami.
- 2 Každá hypotéza má formu úsudku o již definovaných pojmech: musí obsahovat dvě části: **předpoklad(y)** a **závěr**.
- 3 U hypotézy nás zajímá její **pravdivost** či **nepravdivost**.

Co je věta (tvrzení, lemma) a její důkaz?

Věta

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x + 6$ je sudé přirozené číslo.

Důkaz

Ať x je sudé přirozené číslo. Potom $x = 2k$ pro nějaké přirozené číslo k . Potom $x + 6 = 2k + 6 = 2(k + 3)$. Protože $k + 3$ je přirozené číslo, je $x + 6$ číslo sudé. ■

Důležité poznámky

- 1 Důkaz je psán českými oznamovacími větami.^a
- 2 Důkaz je **konečná** a **korektní** argumentace, která oponenta přesvědčí o pravdivosti dokazovaného tvrzení.^b

^aNa přednáškách budeme používat „těsnopis“, který lze snadno do oznamovacích vět přepsat.

^bToto je neformální vysvětlení pojmu důkaz. Formální důkazy studuje **matematická logika**.

Neformálně

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je kolekce **jakýchkoli** objektů (těm budeme říkat **vektory**^a), které mezi sebou můžeme **sčítat** a každý z nich můžeme vynásobit **skalárem** (v našem případě prvkem $\mathbb{R}$).

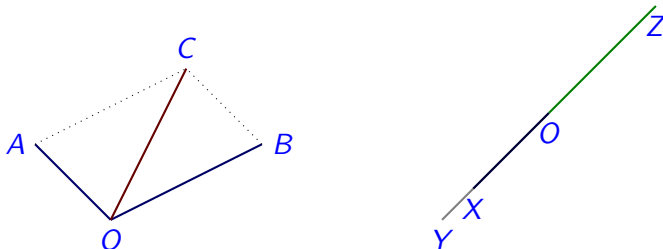
Sčítání vektorů a násobení skalárem se musí **řídít jistými zákonitostmi**. Tyto zákonitosti mají umožnit (například) řešit „lineární rovnice“.

^aSlovo *vektor* pochází z latiny. Český překlad by mohl být *přenašeč* (fyzikální vektor „přenáší“ bod do jiného bodu).

Důležité: Obecný vektor je prvek obecného lineárního prostoru. Vektor obecně **nemá velikost** a **nemá směr**.

Příklad (orientované úsečky v rovině)

Dvě operace:



sčítání: $OC = OA + OB$

násobení skalárem: $OY = \sqrt{2} \cdot OX$, $OZ = -\sqrt{2} \cdot OX$

Sčítání orientovaných úseček a násobení orientované úsečky reálným skalárem **splňují jisté axiomy**.

Motivace axiomů pro lineární prostor

Vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici $2x + 7 = 4$.

Postup (ekvivalentní úpravy):

$$\begin{aligned}2x + 7 &= 4 \\(2x + 7) + (-7) &= 4 + (-7) \\(2x + (7 + (-7))) &= 4 + (-7) \\2x + 0 &= 4 + (-7) \\2x &= 4 + (-7) \\2^{-1} \cdot (2x) &= 2^{-1} \cdot (4 + (-7)) \\(2^{-1} \cdot 2)x &= 2^{-1} \cdot (4 + (-7)) \\1 \cdot x &= 2^{-1} \cdot (4 + (-7)) \\x &= 2^{-1} \cdot (4 + (-7))\end{aligned}$$

Všimněme si: pro algoritmus jsou důležité **vlastnosti** operací.

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$)

Lineární prostor (nad $\mathbb{R}$) je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \rightarrow L, \quad \cdot : \mathbb{R} \times L \rightarrow L$$

pro které platí následující:

1 Vlastnosti sčítání:

- 1 Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (**existence nulového vektoru**).
- 2 Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (**asociativita sčítání vektorů**).
- 3 Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (**komutativita sčítání vektorů**).
- 4 Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (**existence opačného vektoru**, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad $\mathbb{R}$), pokrač.

2 Vlastnosti násobení skalárem:

- 1 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
- 2 Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).

3 Distributivní zákony:

- 1 Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
- 2 Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Příklady

- 1 Orientované úsečky v rovině (fyzikální, případně geometrická intuice).
- 2 Reálné polynomy (značení: $\mathbb{R}[x]$).
- 3 n -tice reálných čísel (značení: $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$).^a
- 4 Komplexní čísla nad $\mathbb{R}$ (značení: $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$), tzv. Gaussova rovina.
- 5 Řada dalších příkladů. . .

^a**Důležité:** Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme psát jako n -tice **do sloupců**.

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

- 1 Nulový vektor je jednoznačně určen.
- 2 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
- 3 Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
- 4 Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

- 1 Ať existují $\vec{o}_1, \vec{o}_2$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí:
 $\vec{x} + \vec{o}_1 = \vec{o}_1 + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o}_2 = \vec{o}_2 + \vec{x} = \vec{x}$. Pak
 $\vec{o}_1 = \vec{o}_1 + \vec{o}_2 = \vec{o}_2$.
- 2 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Takže pro libovolný vektor $\vec{v}$ platí $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = (\vec{v} + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Takže $0 \cdot \vec{x}$ se chová jako nulový vektor. Proto $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

- ③ Platí: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 - 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
- ④ Platí: $a \cdot \vec{o} = a \cdot (0 \cdot \vec{o}) = (a \cdot 0) \cdot \vec{o} = 0 \cdot \vec{o} = \vec{o}$.



Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.

Ať $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1} . Tudíž
 $\vec{o} = a^{-1} \cdot \vec{o} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.



Povšimněme si, čeho využívá předchozí tvrzení:

Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: a^{-1} existuje, jakmile $a \neq 0$.

Další příklady a protipříklady

- ❶ $L = (0, +\infty)$. Operace sčítání vektorů: $x \oplus y := x \cdot y$.
Násobení skalárem: $\alpha \odot x := x^\alpha$. Pak L je lineární prostor.
- ❷ L je jakákoli jednoprvková množina. Pak L (spolu s evidentními operacemi) je lineární prostor. Říkáme mu **triviální lineární prostor**. Nutně: $L = \{\vec{0}\}$.
- ❸ $L = \mathbb{R}^2$. Operace: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + d \\ b + c \end{pmatrix}$,
 $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$. Nejde o lineární prostor.

Role reálných skalárů

Lze $\mathbb{R}$ nahradit jiným „číselným oborem“?

Se skaláry je třeba umět následující: rozumné sčítání, násobení.

Abstraktní pojem: skaláry musí tvořit strukturu $\mathbb{F}$, které se říká **těleso**.

To vede k pojmu **lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$** . Více v příští přednášce (téma 01B).

Poznámka

Abstrakce v lineární algebře má tedy dva stupně:

- 1 Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ abstrahuje (například) prostor orientovaných úseček.
- 2 Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ abstrahuje dále: roli skalárů převzímou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

- 1 Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
Díky asociativitě sčítání **nemusíme psát závorky**.
- 2 Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
Díky axiomům **jde opět o násobek** $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
- 3 Obecněji, **můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů**.
To znamená: je-li dán **konečný seznam** vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a **konečný seznam** skalárů^a $(a_1, \dots, a_n)$, lze vytvořit **lineární kombinaci**

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

^aTěmto skalárům říkáme **koeficienty** lineární kombinace.

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ v $\mathbb{R}^n$ vytvářejí „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tento „rovný kus“ prostoru $\mathbb{R}^n$ prochází počátkem a má směr $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Příští přednášky: těmto „rovným kusům“ v $\mathbb{R}^n$ budeme říkat **lineární podprostory** $\mathbb{R}^n$.

Pochopitelně, v příštích přednáškách budeme pracovat daleko abstraktněji než v $\mathbb{R}^n$.

Slogan je reklamní heslo!

Na přednášce budeme zmiňovat řadu sloganů. Slogany mají sloužit k intuitivnímu pochopení. Slogany v žádném případě **nemohou nahradit** přesná znění definic, vět, atd.

Lineární prostory nad $\mathbb{F}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška (téma 01A)

Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ jako zobecnění (například) prostoru orientovaných úseček v rovině.

Dnešní přednáška

- 1 Těleso $\mathbb{F}$ jako zobecnění reálných čísel.
- 2 Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ jako zobecnění pojmu lineární prostor nad $\mathbb{R}$.
- 3 **Důležité:** povšmneme si, že důkazy typicky nesouvisí s konkrétními operacemi; souvisí s pouze s **algebraickými vlastnostmi** těchto operací.^a

Od příště budeme pracovat s lineárními prostory nad obecným tělesem.

^aDo jisté míry je tak dnešní přednáška „kopií“ tématu 01A. Algebra dovolí od příště takovou marnotratnost nedopustit.

Sčítání a násobení reálných čísel

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

pro které platí následující:

1 Vlastnosti sčítání:

- 1 Existuje $0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (**existence nuly**).
- 2 Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativita sčítání**).
- 3 Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a + b = b + a$ (**komutativita sčítání**).
- 4 Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{R}$ tak, že $a + b = 0$ (**existence opačného čísla**, značíme $b = -a$).

Sčítání a násobení reálných čísel (pokrač.)

2 Vlastnosti násobení:

- 1 Existuje $1 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
- 2 Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
- 3 Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).

3 Provázanost sčítání a násobení:

- 1 Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
- 2 Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).

4 Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1} .

Poznámka

Výše uvedené vlastnosti byly podstatné pro zavedení pojmu **lineární prostor nad $\mathbb{R}$** (viz minulou přednášku).

Příklady: další „standardní“ sčítání a násobení

- 1 Standardní sčítání a násobení racionálních čísel: obě operace na množině $\mathbb{Q}$ **splňují stejné vlastnosti** jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
- 2 Standardní sčítání a násobení komplexních čísel: obě operace na množině $\mathbb{C}$ **splňují stejné vlastnosti** jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
- 3 Standardní sčítání a násobení celých čísel: obě operace na množině $\mathbb{Z}$ **nesplňují stejné vlastnosti** jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$. **Neplatí test invertibility**: například $2 \neq 0$, ale $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$ **neexistuje!**^a

^aTest invertibility v $\mathbb{R}$ byl v minulé přednášce podstatný! Množinu $\mathbb{Z}$ tedy jako množinu skalárů nebudeme moci použít.

Příklad: „nestandardní“ sčítání a násobení

- ① Množina $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ s operacemi:

+	0	1	·	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

- ② Množina $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ s operacemi:

+	0	1	2	·	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Operace na množinách $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ **splňují stejné vlastnosti** jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.

Slogan pro těleso

Těleso $\mathbb{F}$ je kolekce **jakýchkoli** objektů (těm budeme říkat **prvky tělesa $\mathbb{F}$**), které mezi sebou můžeme sčítat a násobit. Sčítání a násobení v $\mathbb{F}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení v $\mathbb{R}$.

Definice (těleso)

Těleso je množina $\mathbb{F}$, vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$

pro které platí následující:

① Vlastnosti sčítání:

- ① Existuje $0 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (**existence nuly**).
- ② Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**asociativita sčítání**).
- ③ Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a + b = b + a$ (**komutativita sčítání**).
- ④ Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{F}$ tak, že $a + b = 0$ (**existence opačného čísla**, značíme $b = -a$).

Definice tělesa (pokrač.)

② Vlastnosti násobení:

- ① Existuje $1 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
- ② Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
- ③ Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).

③ Provázanost sčítání a násobení:

- ① Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
- ② Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).

④ Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1} .

Příklady

- 1 Množiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se standardním sčítáním a násobením **jsou** tělesa.
- 2 Množina $\mathbb{Z}$ se standardním sčítáním a násobením **není** těleso.
- 3 Množiny $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ **jsou** tělesa (sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení 2, resp. 3).

Obecněji: množina $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, kde p je **prvočíslo**, je těleso, pokud čísla sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení p .

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$)

Lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \rightarrow L, \quad \cdot : \mathbb{F} \times L \rightarrow L$$

pro které platí následující:

1 Vlastnosti sčítání:

- 1 Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
- 2 Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
- 3 Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
- 4 Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$), pokrač.

2 Vlastnosti násobení skalárem:

- 1 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
- 2 Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).

3 Distributivní zákony:

- 1 Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
- 2 Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Definice je formálně stejná jako pro lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Jediná změna: těleso $\mathbb{R}$ je nahrazeno obecným tělesem $\mathbb{F}$.

Příklady lineárních prostorů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$

- ❶ Prostory $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Vektory jsou uspořádané n -tice prvků $\mathbb{F}$, **psané do sloupce**. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

Například: v $(\mathbb{Z}_7)^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, v $\mathbb{Q}^3$ je vektor $\begin{pmatrix} 2.14 \\ -21.7 \\ 12 \end{pmatrix}$,

v $\mathbb{C}^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2 - 4i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$, atd.

- ❷ Prostory $\mathbb{F}[x]$ polynomů v neurčité x s koeficienty z tělesa $\mathbb{F}$. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$, vektory jsou jednotlivé polynomy. Sčítání a násobení je definováno analogicky jako v $\mathbb{R}[x]$.
Například: v $\mathbb{Z}_3[x]$ platí:

$$(2x + 2) + (x + 2) = 1$$

$$(2x + 2) \cdot (x + 2) = 2x^2 + 1$$

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

- 1 Nulový vektor je jednoznačně určen.
- 2 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
- 3 Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
- 4 Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

- 1 Ať existují $\vec{o}_1, \vec{o}_2$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí:
 $\vec{x} + \vec{o}_1 = \vec{o}_1 + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o}_2 = \vec{o}_2 + \vec{x} = \vec{x}$. Pak
 $\vec{o}_1 = \vec{o}_1 + \vec{o}_2 = \vec{o}_2$.
- 2 Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = (0 + 0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Takže pro libovolný vektor $\vec{v}$ platí $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = (\vec{v} + 0 \cdot \vec{x}) + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $\vec{v} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Takže $0 \cdot \vec{x}$ se chová jako nulový vektor. Proto $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

- ③ Platí: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1 - 1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
- ④ Platí: $a \cdot \vec{o} = a \cdot (0 \cdot \vec{o}) = (a \cdot 0) \cdot \vec{o} = 0 \cdot \vec{o} = \vec{o}$.



Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{F}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.

Ať $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1} . Tudíž
 $\vec{o} = a^{-1} \cdot \vec{o} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.



Povšimněme si:

Důkazy jsou stejné, jako v minulé přednášce!

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

- 1 Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
Díky asociativitě sčítání **nemusíme psát závorky**.
- 2 Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
Díky axiomům **jde opět o násobek** $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
- 3 Obecněji, **můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů**.
To znamená: je-li dán **konečný seznam** vektorů $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a **konečný seznam** skalárů^a $(a_1, \dots, a_n)$, lze vytvořit **lineární kombinaci**

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

^aTěmto skalárům říkáme **koeficienty** lineární kombinace.

Definice

Seznam (také: **skupina**) **vektorů** je buď prázdná posloupnost $()$ nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1) \text{ vs. } \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ vs. } \{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

- 1 $()$ definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) **lineární kombinaci** (s prázdným seznamem koeficientů).

- 2 $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho **lineární kombinace** (se seznamem koeficientů $(a_1, \dots, a_n)$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1)$ v $\mathbb{R}^2$



a seznam (2.5) reálných čísel je



lineární kombinace.

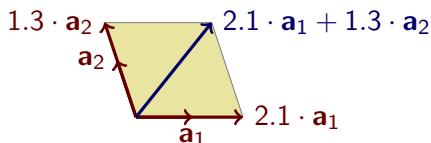
Všechny možné lineární kombinace vektoru $\mathbf{a}_1$ vytvářejí v $\mathbb{R}^2$ přímku procházející počátkem (se směrem $\mathbf{a}_1$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ v $\mathbb{R}^3$



a seznam $(2.1, 1.3)$ reálných čísel je



Všechny možné lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ vytvářejí v $\mathbb{R}^3$ rovinu procházející počátkem (se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$).

Význam lineárních kombinací (zatím jen slogan)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ v L vytvářejí „rovný kus“ prostoru L .

Tento „rovný kus“ prostoru L prochází počátkem $\vec{0}$ a má „směr“ $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Příští přednáška: těmto „rovným kusům“ v L budeme říkat **lineární podprostory** L .

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic)

Existují koeficienty $x, y \in \mathbb{R}$ tak, že v $\mathbb{R}^2$ platí rovnost

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ?$$

Dva pohledy na tento problém:

- 1 Hledáme prvky $x, y \in \mathbb{R}$ tak, že platí

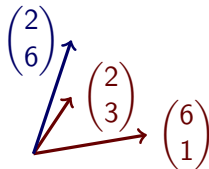
$$2x + 6y = 2$$

$$3x + 1y = 6$$

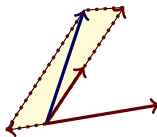
To znamená: koeficienty lineární kombinace jsou řešením jisté soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$.

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic, pokrač.)

② Pro zadané vektory



hledáme „natažení“ červených vektorů tak, aby modrý vektor byl úhlopříčkou čtyřúhelníka:



Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Hledáme-li pro pevný seznam $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ a pevný vektor $\mathbf{b}$ v $\mathbb{F}^r$ reálné koeficienty $x_1, \dots, x_s$ tak, aby platila rovnost

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{b}$$

pak lze na tuto úlohu pohlížet dvěma způsoby:

- 1 Řešíme **soustavu r lineárních rovnic o s neznámých**.
- 2 Hledáme „natažení“ vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ pomocí skalárů $x_1, \dots, x_s$ tak, aby vektor $\mathbf{b}$ **tvořil úhlopříčku rovnoběžnostěnu**.

Příští přednášky (téma 06A): Druhý pohled na tuto úlohu nám dovolí vybudovat elegantní metodu řešení soustav (Gaussovu eliminaci).

Lineární obal a lineární podprostor

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.5 a 1.6 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulá přednáška

- 1 Definice lineárního prostoru (nad obecným tělesem).
- 2 Lineární kombinace.

Dnešní přednáška

- 1 Lineární obal množiny vektorů.
- 2 Lineární podprostor lineárního prostoru.

Připomenutí

V lineárním prostoru můžeme zjednodušovat zápisy:

- 1 Píšeme: $-\vec{x}$ místo $(-1) \cdot \vec{x}$. Jde o **opačný vektor** k vektoru $\vec{x}$ (dokázáno minule).
- 2 Píšeme: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n$ místo $(\dots(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \cdots + \vec{x}_{n-1}) + \vec{x}_n$. Důvod: **asociativita sčítání vektorů**.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ s koeficienty $a_1, \dots, a_n$ z tělesa $\mathbb{F}$ je vektor $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$.

Lineární kombinace prázdného seznamu $()$ je nulový vektor.

Konečné a nekonečné množiny

Připomenutí:^a množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

- 1 Množina M je **konečná**, když má přesně n prvků, kde n je nějaké přirozené číslo.

To znamená: M je konečná, když buď

$$M = \emptyset \text{ (množina } M \text{ má 0 prvků, značení: } \text{card}(M) = 0),$$

nebo

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \text{ kde } n \geq 1 \text{ je přirozené číslo (v tom případě má množina } M \text{ } n \text{ prvků, značení: } \text{card}(M) = n).$$

- 2 Množina M je **nekonečná**, když není konečná.

Například $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ jsou nekonečné množiny. Množina $\mathbb{R}[x]$ je nekonečná.

^a**Důležité:** v přednáškách z lineární algebry **nula je přirozené číslo**.

Definice (lineární obal množiny vektorů)

Ať M je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru L . **Lineární obal množiny vektorů** M je množina $\text{span}(M)$, definovaná takto:

$$\vec{x} \in \text{span}(M) \quad \text{právě tehdy, když}^a \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké $n \geq 0$, nějaká $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ a nějaká $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M$.

^a**Pozor:** prázdná lineární kombinace je rovna vektoru $\vec{o}$.

Ujasnění si definice $\text{span}(M)$

$\vec{x} \in \text{span}(M)$ právě tehdy, když **existuje** nějaký seznam S vektorů z množiny M tak, že $\vec{x}$ je roven nějaké lineární kombinaci seznamu S .

To jest: $\text{span}(M)$ je množina všech možných lineárních kombinací, které lze z M utvořit.

Příklady (viz minulé přednášky)

① Pro $\longrightarrow \mathbf{a}_1$

v $\mathbb{R}^2$ je $\text{span}(\{\mathbf{a}_1\})$ přímka procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1)$.

② Pro 

v $\mathbb{R}^3$ je $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

Pozor: pro $\mathbf{a}_2 \longleftrightarrow \mathbf{a}_1$

v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ **není rovina!** Jde opět o přímku. Jak poznat o co jde? Uvidíme příště.^a

^aToto téma se zove **lineární závislost** a **lineární nezávislost**.

Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu

- 1 Je-li $M \subseteq N$, potom $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.
- 2 Pro vš. M platí: $M \subseteq \text{span}(M)$.
- 3 Pro vš. M platí: $\text{span}(\text{span}(M)) \subseteq \text{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. 

Vysvětlení uzávěrových vlastností (slogan)

Lineárními kombinacemi tvoříme „rovne kusy“ lineárního prostoru (viz minulou přednášku).

Množina $\text{span}(M)$ je tedy „zabalení“ množiny M tak, aby výsledkem byl „co nejmenší rovný kus“, který obsahuje M .

Definice (lineární podprostor)

Ať W je podmnožina lineárního prostoru L . Řekneme, že W je **lineární podprostor**^a lineárního prostoru L , když platí $\text{span}(W) \subseteq W$.

^aPokud W je lineárním podprostorem prostoru L , říkáme také, že L je lineárním **nadprostorem** prostoru W .

Slogan pro lineární podprostor

Podprostor je „dobrá“ podmnožina prostoru. Žádnou lineární kombinací nelze z lineárního podprostoru „utéct“.

Tvrzení

- 1 $\text{span}(M)$ je vždy lineární podprostor. Jde o nejmenší podprostor, který obsahuje množinu M .
- 2 Množina M je lineární podprostor právě tehdy, když $\text{span}(M) = M$.

Důkaz.

Přednáška.

Tvrzení

Ať L je lineární prostor. Podmnožina $W \subseteq L$ je lineárním podprostorem prostoru L právě tehdy, když platí:

- 1 $\vec{0}$ je prvkem W (uzavřenost W na nulový vektor).
- 2 $\vec{x} + \vec{y}$ je prvkem W , pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in W$ (uzavřenost W na součet vektorů).
- 3 $a \cdot \vec{x}$ je prvkem W , pro každé $a \in \mathbb{F}$ a každé $\vec{x} \in W$ (uzavřenost W na skalární násobek).

Důkaz.

Přednáška. 

Další slogan pro lineární podprostor

Lineární podprostor vždy obsahuje nulový vektor a „vydrží“ operace součtu a skalárního násobku.

Klasifikace lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$?

Každá z množin následujících typů

- 1 Jednoprvková množina obsahující pouze počátek.

nebo

- 2 Každá přímka procházející počátkem.

nebo

- 3 Každá rovina procházející počátkem.

- 4 Celá množina $\mathbb{R}^3$.

je lineární podprostor^a prostoru $\mathbb{R}^3$.

^aTo, že žádné jiné lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ neexistují, ukážeme později. Budeme k tomu potřebovat pojem **dimense**.

Důležité

Ať W je lineární podprostor lineárního prostoru L . Potom množina W sama o sobě je lineárním prostorem, pokud sčítání vektorů ve W a násobení vektoru skalárem ve W definujeme **stejně** jako v prostoru L .

Obrácené tvrzení ale neplatí: například $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ **není** lineárním podprostorem $\mathbb{R}^2$. Ale množina W spolu s operacemi

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří lineární prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklady

- ❶ Každý lineární prostor je sám svým podprostorem.
- ❷ Množina $\{\vec{0}\}$ je vždy lineárním podprostorem.^a
- ❸ $\mathbb{R}^3$ je lineární prostor (operace jsou definovány po složkách).

❶ $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$ je lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.

❷ $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$.

Pozor! Na množině W_2 lze definovat strukturu lineárního prostoru (cvičení).

^aTomuto podprostoru říkáme **triviální podprostor**.

Příklady (pokrač.)

- ④ Pro každé $n \geq 0$ je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}[x]$.
- ⑤ Označme jako $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 3 a jako $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$ množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 136.
Potom $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$.

Obecněji: Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Označme jako $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ množinu všech polynomů nad $\mathbb{F}$ stupně maximálně n , $n \geq 0$.

Jakmile $n \leq m$, je $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$ lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{F}^{\leq m}[x]$.

Co je průnik a sjednocení systému množin **skutečně?**

Ať U je množina a ať $A_i \subseteq U$, $i \in I$, je systém podmnožin množiny U . Potom:

- ① Průnik $\bigcap_{i \in I} A_i$ je opět podmnožina množiny U a má následující vlastnost:

$\bigcap_{i \in I} A_i$ je **největší** podmnožina množiny U , která je **podmnožinou** každé z množin A_i .

- ② Sjednocení $\bigcup_{i \in I} A_i$ je opět podmnožina množiny U a má následující vlastnost:

$\bigcup_{i \in I} A_i$ je **nejmenší** podmnožina množiny U , která je **nadmnožinou** každé z množin A_i .

Lze analogická tvrzení dokázat pro lineární podprostory?

Průnik a sjednocení systému lineárních podprostorů

Ať L je lineární prostor.

- 1 Průnik libovolného systému $\{W_i \mid i \in I\}$ podprostorů prostoru L je lineárním podprostorem prostoru L .
- 2 Sjednocení systému $\{W_i \mid i \in I\}$ lineárních podprostorů prostoru L obecně lineárním podprostorem prostoru L není.

Důkaz.

Přednáška. 

Definice (spojení systému lineárních podprostorů)

Ať $\{W_i \mid i \in I\}$ je systém lineárních podprostorů prostoru L .

Lineárnímu podprostoru $\text{span}(\bigcup_{i \in I} W_i)$ prostoru L říkáme **spojení** podprostorů W_i , $i \in I$, a značíme jej^a

$$\bigvee_{i \in I} W_i$$

^aV případě systému dvou lineárních podprostorů W_1 , W_2 , používáme i značení $W_1 \vee W_2$.

Co je průnik a spojení systému lineárních podprostorů skutečně?

Ať L je lineární prostor a ať $W_i \subseteq U$, $i \in I$, je systém lineárních podprostorů prostoru L . Potom:

- 1 Průnik $\bigcap_{i \in I} W_i$ je opět lineární podprostor prostoru L a má následující vlastnost:

$\bigcap_{i \in I} W_i$ je **největší lineární podprostor prostoru L , který je lineárním podprostorem každého z podprostorů W_i .**

- 2 Spojení $\bigvee_{i \in I} W_i$ je opět lineární podprostor prostoru L a má následující vlastnost:

$\bigvee_{i \in I} W_i$ je **nejmenší lineární podprostor prostoru L , který je lineárním nadprostorem každého z podprostorů W_i .**

Lineární závislost a nezávislost

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 3.1 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulé přednášky

- 1 Lineární kombinace.
- 2 Definice lineárního obalu.
- 3 Definice lineárního podprostoru.

Dnešní přednáška

- 1 Lineární závislost/nezávislost seznamu a množiny vektorů v lineárním prostoru.

Připomenutí

1 Pro



v $\mathbb{R}^3$ je $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

2 Pro



v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina není.

V množině $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je (například) vektor $\mathbf{a}_2$ „zbytečný“^a vzhledem k tvorbě lineárních kombinací.

Platí totiž $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}) = \text{span}(\{\mathbf{a}_1\})$.

^aZa chvíli budeme říkat, že množina $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je lineárně závislá.

Definice

Lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n$ je **triviální**, pokud $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

V opačném případě je lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n$ **netriviální**.

Poznámky

- 1 Triviální lineární kombinace je **vždy** rovna nulovému vektoru: rovnost $0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$ platí, protože $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$ (dokázáno v tématu 01B).
- 2 I netriviální lineární kombinace může být rovna nulovému vektoru: například $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$.
- 3 Lineární kombinaci, která dává nulový vektor, také říkáme **nulová kombinace**.^a

^a**Pozor:** triviální kombinace je **vždy** nulová. Nulová kombinace **nemusí** být triviální.

Slogany pro lineární závislost a lineární nezávislost

Mějme **kolekci**^a vektorů. Chceme podrobně studovat následující dvě situace:^b

- 1 Při tvorbě lineárních kombinací z naší kolekce je **každý vektor** z naší kolekce **důležitý**. Tomuto jevu budeme říkat **lineární nezávislost**.
- 2 Při tvorbě lineárních kombinací z naší kolekce je **některý vektor** z naší kolekce **nedůležitý**. Tomuto jevu budeme říkat **lineární závislost**.

^aKolekcí vektorů tu rozumíme buď seznam vektorů nebo množinu vektorů.

^b**Pozor:** Píšeme slogany. Nemusíme se tedy trápit nad přesností našeho vyjadřování. Slogany mají pouze pomáhat. Slogany nemohou nahradit přesná znění definic.

Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam S vektorů je **lineárně nezávislý**, pokud platí jedna z následujících dvou podmínek:

- 1 Seznam S je prázdný.
- 2 Seznam S je tvaru $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ a platí:^a jestliže $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$, pak $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Řekneme, že seznam S je **lineárně závislý**, pokud není lineárně nezávislý.

^aPozor: jde o implikaci (tj., jde o tvrzení ve tvaru **jestliže**..., **potom**...)

Příklady

- 1 Prázdný seznam $()$ je **vždy** lineárně nezávislý.
- 2 Seznam $(\vec{0})$ je **vždy** lineárně závislý.
- 3 Seznam, ve kterém se opakuje vektor, je **vždy** lineárně závislý.

Příklad

Nulová lineární kombinace $x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$ v $\mathbb{F}^r$, kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

kóduje soustavu r lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_s a_{1s} &= 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_s a_{2s} &= 0 \\ &\vdots \\ x_1 a_{r1} + x_2 a_{r2} + \dots + x_s a_{rs} &= 0 \end{aligned}$$

o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

Seznam $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když tato soustava má pouze **triviální** řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$.

Definice (lineární nezávislost množiny vektorů)

Ať M je množina vektorů v lineárním prostoru L . Řekneme, že M je **lineárně nezávislá**, pokud platí jedna z následujících dvou podmínek:

- 1 Množina M je prázdná.
- 2 Množina M je neprázdná a navíc platí:^a jestliže $n > 0$ je přirozené číslo, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou vektory z M a $a_1, \dots, a_n$ jsou skaláry z $\mathbb{F}$ a platí $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{0}$, potom $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Řekneme, že množina M je **lineárně závislá**, pokud není lineárně nezávislá.

^aPozor: jde o implikaci (tj., jde o tvrzení ve tvaru **jestliže**... , **potom**...)

Příklady

- 1 $\{\vec{0}\}$ je lineárně závislá množina v jakémkoli lineárním prostoru L .

Obecněji: ať $\vec{0} \in M$, potom M je lineárně závislá množina.

- 2 Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^3$.

Obecněji: definujte pro $i = 1, \dots, n$, vektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ jako n -tici mající na i -té pozici 1 a všude jinde 0. Potom $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^n$.

- 3 Nekonečná množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ je lineárně nezávislá množina v prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$.

Příklady (pokrač.)

- 4 Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně závislá množina v $\mathbb{R}^3$.

Důvod:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

„Bezstarostné“ zmenšení lineárně nezávislé množiny

Ať M je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru L .
Jakmile $N \subseteq M$, je i N lineárně nezávislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. 

Slogan

Z lineárně nezávislé množiny vektorů můžeme odebrat jakékoli vektory a výsledná množina vektorů je opět lineárně nezávislá.

„Bezstarostné“ zvětšení lineárně závislé množiny

Ať M je lineárně závislá množina vektorů v lineárním prostoru L .
Jakmile N je množina vektorů z L a platí $M \subseteq N$, je i N lineárně závislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. 

Slogan

Do lineárně závislé množiny vektorů můžeme přidat nějaké vektory
a výsledná množina vektorů je opět lineárně závislá.

„Opatrné“ zvětšení lineárně nezávislé množiny

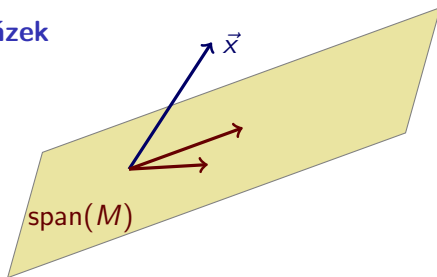
Ať M je lineárně nezávislá množina vektorů z lineárního prostoru L ,
ať $\vec{v} \notin \text{span}(M)$.

Potom je množina $M \cup \{\vec{v}\}$ lineárně nezávislá.

Důkaz.

Přednáška. ■

Ilustrační obrázek



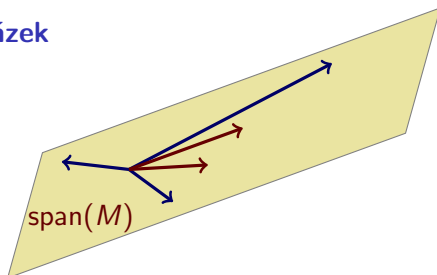
„Opatrné“ zmenšení lineárně závislé množiny

Ať M je lineárně závislá množina vektorů z lineárního prostoru L .
Potom existuje $\vec{v} \in M$ tak, že $\text{span}(M \setminus \{\vec{v}\}) = \text{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Ilustrační obrázek



Báze a dimenze

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 3.6 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Lineární kombinace, lineární závislost/nezávislost.
- 2 Lineární obal seznamu/množiny vektorů.

Dnešní přednáška

- 1 Báze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **báze je výběr systému souřadnicových os.**

- 2 Dimense lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **dimense je počet souřadnicových os.**

Připomenutí

Množina M je **konečná**, pokud buď $M = \emptyset$ nebo $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ pro nějaké přirozené číslo $n \geq 1$. Množina M je **nekonečná**, když není konečná.

Definice (množina generátorů)

Ať W je lineární podprostor prostoru L . Řekneme, že množina G **generuje** W , když platí $\text{span}(G) = W$. (Říkáme také: G je **množina generátorů** podprostoru W .)

Definice (konečně generovaný podprostor)

Řekneme, že lineární podprostor W prostoru L je **konečně generovaný**, když existuje konečná množina jeho generátorů. (To jest, když platí $\text{span}(G) = W$ pro nějakou **konečnou** množinu G .)

Příklady

- 1 Pro **každý** prostor L platí: L je množina generátorů prostoru L .

Množina generátorů L prostoru L obecně není konečná a je **vždy lineárně závislá** (například: $\mathbb{R}^2$ je **nekonečná lineárně závislá** množina generátorů prostoru $\mathbb{R}^2$).

- 2 Jak $\emptyset$, tak $\{\vec{o}\}$ jsou **konečné** množiny generátorů triviálního prostoru $\{\vec{o}\}$. Důvody: $\text{span}(\emptyset) = \{\vec{o}\}$ (minulé přednášky) a $\text{span}(\{\vec{o}\}) = \{\vec{o}\}$.

Všimněme si:

- 1 $\emptyset$ je **lineárně nezávislá množina generátorů** prostoru $\{\vec{o}\}$.
- 2 $\{\vec{o}\}$ je **lineárně závislá množina generátorů** prostoru $\{\vec{o}\}$.
- 3 **Konečná** množina $G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generuje „osu prvního a třetího kvadrantu“ prostoru $\mathbb{R}^2$. Množina G je **lineárně závislá**.

Definice (báze)

Lineárně nezávislé množině B , která generuje prostor L , říkáme **báze prostoru L** . Je-li báze B konečná, pak seznamu prvků utvořeného ze všech prvků množiny B říkáme **uspořádaná báze**.

Slogan pro bázi

Báze prostoru je „nejúspornější“ množina generátorů.

Příklady

- ❶ $\emptyset$ je báze triviálního prostoru $\{\vec{0}\}$.
- ❷ Každá z množin $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.
- ❸ Množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů.

Příklad (kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$)

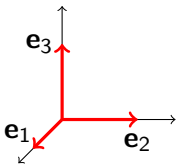
Ať $\mathbb{F}$ je **jakékoli** těleso. Označme jako $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ následující **seznam** vektorů v $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$:

$\mathbf{e}_i$ má jedničku na i -té posici, všude jinde nuly.

Potom K_n je **uspořádaná** báze prostoru $\mathbb{F}^n$.

Této uspořádané bázi K_n říkáme **kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$** .
(Také: **standardní báze**.)

Příklad: kanonická báze K_3 v $\mathbb{R}^3$.



$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Fourierova báze pro $n = 4$ (varianta této báze je používána v JPEG)

Pro $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, je **seznam** $(\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, kde

$$\begin{aligned}\vec{f}_0 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^0 \\ w^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{f}_1 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \vec{f}_2 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^2 \\ w^4 \\ w^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & \vec{f}_3 &= \begin{pmatrix} w^0 \\ w^3 \\ w^6 \\ w^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{C}^4$ nad tělesem $\mathbb{C}$.

Tvrzení (Existence báze pro konečně generované prostory)

Každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi.

Navíc: všechny možné báze prostoru L mají stejný počet prvků.

Myšlenka důkazu

První tvrzení: víme, že $\text{span}(G) = L$, kde G je konečná. Lze postupovat dvěma způsoby:

- (I) „Přidávat“ do prázdné množiny „důležité“ vektory z G .
- (II) „Ubírat“ z G „zbytečné“ vektory.

Detaily: přednáška.

Druhé tvrzení: **Exchange Lemma** (viz **skripta**, Lemma 3.2.10 a cvičení).



Definice (prostor konečné dimenze)

Lineární prostor L má **dimensi** n (značíme: $\dim(L) = n$), když existuje báze B prostoru L , která má n prvků,^a kde n je přirozené číslo.

^aA tudíž, podle předchozího, **všechny** báze prostoru L mají n prvků.

Příklady

- ❶ Platí: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ❷ Obecněji: pro **jakékoli** těleso $\mathbb{F}$ platí $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $n \geq 0$.
- ❸ Platí: $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.
- ❹ Prostor $\mathbb{R}[x]$ všech reálných polynomů **nemá** konečnou dimenzi.
- ❺ Podprostor $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ (polynomy stupně nejvýše 3) prostoru $\mathbb{R}[x]$ má dimenzi 4. Uspořádaná báze je např. $(x^3, x^2, x, 1)$.

Poznámka

Ať L má konečnou dimenzi a ať M je konečná podmnožina L .

- 1 Je-li M lineárně nezávislá, pak $\text{card}(M) \leq \dim(M)$.
- 2 Ať $\text{card}(M) = \dim(L)$. Potom M je lineárně nezávislá právě tehdy, když platí $\text{span}(M) = L$.

Důsledek (klasifikace lineárních podprostorů $\mathbb{R}^3$)

Lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou **přesně tvaru** $\text{span}(M)$, kde M (**zaměření podprostoru**) je lineárně nezávislá podmnožina $\mathbb{R}^3$:

- 1 Počátek $\{\vec{0}\}$ (když M má **nula** prvků).
- 2 Přímký procházející počátkem (když M má **jeden** prvek).
- 3 Roviny procházející počátkem (když M má **dva** prvky).
- 4 Celé $\mathbb{R}^3$ (když M má **tři** prvky).

Zobecnění: klasifikace^a lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$
(dokonce na lineární podprostory prostoru $\mathbb{F}^n$).

^aTo je náročnější na představu, ale geometrický význam je podobný jako pro lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^3$.

Připomenutí (Téma 02A)

Podprostoru $\text{span}(W_1 \cup W_2)$ říkáme **spojení podprostorů** W_1 a W_2 .
Značení: $W_1 \vee W_2$.

Věta (rovnost dvou lineárních podprostorů)

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory prostoru L konečné dimenze.
Potom $W_1 = W_2$ právě tehdy, když platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.^a

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

- 1 Ať $W_1 = W_2$. Potom $W_1 \vee W_2 = W_1$. Tudíž platí rovnost
 $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$.
- 2 Ať $\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_1 \vee W_2)$. Protože $W_1 \subseteq W_1 \vee W_2$ a oba podprostory mají stejnou dimenzi, platí $W_1 = W_1 \vee W_2$.
Rovnost $W_2 = W_1 \vee W_2$ se dokáže analogicky.
Celkově: $W_1 = W_1 \vee W_2 = W_2$, hotovo.

Důsledek (důležitý pro Frobeniovu větu, téma 06A)

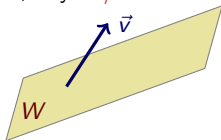
Ať W je lineární podprostor prostoru L konečné dimenze. Pro vektor $\vec{v}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:^a

- 1 $\vec{v} \in W$
- 2 $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v}))$

^aDůkaz: domácí cvičení. Postupujte následovně:

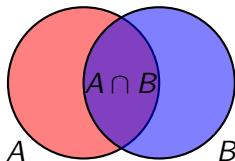
- 1 Dokažte: $\vec{v} \in W$ iff $\text{span}(\vec{v}) \subseteq W$ iff $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$.
- 2 Použijte větu z předchozí stránky: $W = W \vee \text{span}(\vec{v})$ iff $\dim(W) = \dim(W \vee \text{span}(\vec{v})) = \dim(\underbrace{W \vee (W \vee \text{span}(\vec{v}))}_{= W \vee \text{span}(\vec{v})})$.

Měl by pomoci obrázek situace, kdy $\vec{v} \notin W$:



Připomenutí (princip inkluze a exkluze)

Ať A a B jsou **konečné** množiny.



Označíme-li počet prvků množin A , B , $A \cap B$ a $A \cup B$ jako $\text{card}(A)$, $\text{card}(B)$, $\text{card}(A \cap B)$ a $\text{card}(A \cup B)$, potom platí rovnost

$$\text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Věta (o dimensi spojení a průniku)

Ať je L lineární prostor konečné dimense. Potom, pro libovolné lineární podprostory W_1, W_2 , platí rovnost $\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$.

Důkaz.

Přednáška. 

Slogan pro větu o dimensi spojení a průniku

Jde o „princip inkluze a exkluze“ pro lineární prostory konečné dimense. Dimense hraje roli počtu prvků.^a

^aZnovu upozorňujeme: **slogan je reklamní heslo, nikoli skutečnost.**

Věta (za předpokladu (AC))

Každý lineární prostor L má bázi.

Důkaz.

Náročný: nebudeme dokazovat. 

Poznámka

Předpoklad (AC). Zkratka (AC) znamená **Axiom of Choice**, česky: axiom výběru.

Jedná se o tvrzení: kartézský součin libovolného systému neprázdných množin je neprázdna množina.^a

Tvrzení (AC) je nezávislé na základních axiomech teorie množin. Srovnajte s axiomem o rovnoběžkách z geometrie.

^aVe **skriptech** je použita ekvivalentní formulace (AC), tzv. **Zornovo Lemma**.

Pozor: stejný prostor nad různými tělesy má různé vlastnosti

- ① Množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem $\mathbb{C}$,
 - ② lineární prostor dimenze 2 nad tělesem $\mathbb{R}$.
- ② Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel je
 - ① lineární prostor dimenze 1 nad tělesem $\mathbb{R}$,
 - ② lineární prostor nekonečné dimenze nad tělesem $\mathbb{Q}$.^a

^aNepovinné: takzvaná Hamelova báze reálných čísel, viz Příklad 3.6.5 skript.

Důsledek: měli bychom vždy psát, nad jakým tělesem o lineárním prostoru mluvíme!

Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 2.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Báze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **báze je výběr systému souřadnicových os.**

- 2 Dimenze lineárního (pod)prostoru.

Intuitivní význam: **dimenze je počet souřadnicových os.**

Dnešní přednáška

- 1 Souřadnice vektoru vzhledem k **uspořádané** bázi.

Intuitivní význam: **souřadnice vektoru udávají „úseky“ vektoru na jednotlivých souřadnicových osách.**

- 2 Ukážeme **velmi užitečný** pohled na zobrazení (funkce): kalkulus komutativních diagramů.

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L . Pro každý vektor $\vec{x}$ v L existuje jediný seznam $(a_1, \dots, a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

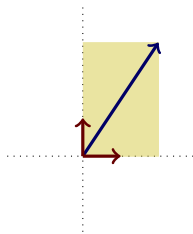
Seznamu $(a_1, \dots, a_n)$ z předchozí věty říkáme **souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$** . Značení:^a

$$\text{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

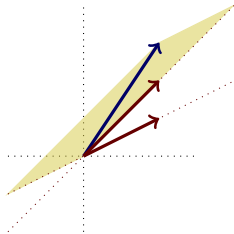
^aTj, souřadnice vektoru $\vec{x}$ chápeme jako další vektor: vektor souřadnic v $\mathbb{F}^n$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy $K_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ jsou uspořádané báze prostoru $\mathbb{R}^2$. (Seznam K_2 je **kanonická báze** prostoru $\mathbb{R}^2$.)



$$\text{coord}_{K_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{coord}_B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Důležitá vlastnost kanonické báze

Připomenutí: prostor $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$ má **kanonickou bázi**

$K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ať $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor v $\mathbb{F}^n$. Potom $\text{coord}_{K_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Důležitá vlastnost každé uspořádané báze

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je **jakákoli** uspořádaná báze prostoru L nad $\mathbb{F}$.

Potom platí rovnosti^a

$$\text{coord}_B(\vec{b}_1) = \mathbf{e}_1, \text{coord}_B(\vec{b}_2) = \mathbf{e}_2, \dots, \text{coord}_B(\vec{b}_n) = \mathbf{e}_n$$

^aTěchto rovností budeme mnohokrát využívat při studiu matic lineárních zobrazení (témata 05A a 05B).

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy

$$B_1 = (1, x, x^2) \quad B_2 = (x^2, x, 1)$$

jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Platí:

$$\text{coord}_{B_1}(3x^2 - 2x + 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{coord}_{B_2}(3x^2 - 2x + 4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x^2 - 2x + 4 = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 3 \cdot x^2, \quad 3x^2 - 2x + 4 = 3 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 4 \cdot 1$$

Tvrzení (linearita výpočtu souřadnic)

Ať B je (jakákoli) konečná uspořádaná báze lineárního prostoru L .
Potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ platí:^a

- ① $\mathbf{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + \mathbf{coord}_B(\vec{y})$.
- ② $\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x})$.

^aTyto dvě vlastnosti jsou velmi důležité. V tématu 04A je budeme studovat abstraktně (vedou k pojmu **lineárního zobrazení**).

Důkaz.

Přednáška. ■

Poznámky

- Slova *funkce* a *zobrazení* **znamení totéž**.
- Skládání zobrazení značíme **stejně** jako násobení (tj. tečkou). Uvidíme později, že skládání zobrazení skutečně **je** jistý druh násobení.

Několik připomenutí

- 1 Zadat **zobrazení** (také: **funkci**) $f : X \rightarrow Y$ znamená: **pro každé** $x \in X$ **zadat právě jedno** $y \in Y$. Toto y značíme $f(x)$ (**funkční hodnota** v x).
Píšeme^a i $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto f(x)$.
- 2 Pro zobrazení $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ značíme $g \cdot f : X \rightarrow Z$ **složené zobrazení** $x \mapsto g(f(x))$.

^aDůležité je rozlišovat: šipka $f : X \rightarrow Y$ **versus** šipka s patkou $x \mapsto f(x)$.

Zobrazení (znovu a podrobně)

Přesná definice zobrazení $f : X \rightarrow Y$ zní:

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je podmnožina $X \times Y$ taková, že pro všechna $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$.

Takovému y říkáme **funkční hodnota f v bodě x** . Místo y píšeme $f(x)$.

Potom lze dokázat:

- 1 Pro libovolnou množinu Y existuje **právě jedno** zobrazení $f : \emptyset \rightarrow Y$.
- 2 Pro libovolnou množinu X existuje **právě jedno** zobrazení $f : X \rightarrow \{y\}$.
- 3 Je-li X neprázdná množina, pak **neexistuje** zobrazení $f : X \rightarrow \emptyset$.

Identické zobrazení a skládání zobrazení

- 1 **Identita na X** je zobrazení $\text{id}_X : X \rightarrow X$, kde $\text{id}_X : x \mapsto x$.
- 2 Platí $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ a $\text{id}_Y \cdot f = f = f \cdot \text{id}_X$, kdykoli je skládání definováno.

Slogan: můžeme malovat obrázky!

- 1 Místo $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ a $g \cdot f : X \rightarrow Z$ můžeme kreslit

$$X \xrightarrow{f} Y \quad Y \xrightarrow{g} Z \quad X \xrightarrow{g \cdot f} Z$$

nebo dokonce psát **rovnosti**, například

$$X \xrightarrow{g \cdot f} Z = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- 2 Protože skládání je asociativní, můžeme nakreslit i obrázek

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

a tento obrázek má (díky asociativitě skládání) jednoznačný význam.

Místo slova *obrázek* budeme používat slovo **diagram**.

Speciální vlastnosti zobrazení

- 1 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **prosté** (také: **injektivní** nebo **injekce**), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.
- 2 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **na** (také: **surjektivní** nebo **surjekce**), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x) = y$.
- 3 Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **bijekce** (také: **vzájemně jednoznačné**), když f je injekce a surjekce současně.

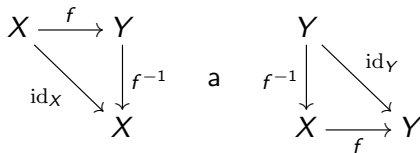
Injekce/surjekce/bijekce a jejich skládání

- 1 Složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce.
- 2 $f : X \rightarrow Y$ je bijekce právě tehdy, když f je invertibilní. To jest: právě tehdy, když existuje jednoznačně určené^a $g : Y \rightarrow X$ tak, že $g \cdot f = \text{id}_X$ a $f \cdot g = \text{id}_Y$.

^aTomuto jednoznačně určenému zobrazení se říká **inverse** zobrazení f a značí se také f^{-1} .

Diagramy pro invertibilní zobrazení

Zobrazení $X \xrightarrow{f} Y$ je **invertibilní** (také: **má inversi**), pokud existuje $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ tak, že diagramy

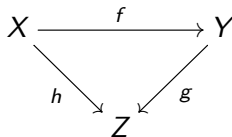


jsou **komutativní**,^a tj., vyjadřují rovnosti $f^{-1} \cdot f = \text{id}_X$ a $f \cdot f^{-1} = \text{id}_Y$.

^a**Neformálně:** toto slovo znamená, že všechny cesty ze „začátku“ diagramu do „konce“ diagramu dávají stejný výsledek.

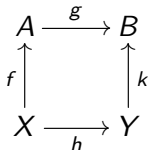
Komutativní trojúhelníky a komutativní čtverce

1 Komutativní trojúhelník



vyjadřuje rovnost $h = g \cdot f$, tj., vyjadřuje platnost rovnosti $h(x) = g(f(x))$ pro **všechna** $x \in X$.

2 Komutativní čtverec



vyjadřuje rovnost $g \cdot f = k \cdot h$, tj., vyjadřuje platnost rovnosti $g(f(x)) = k(h(x))$ pro **všechna** $x \in X$.

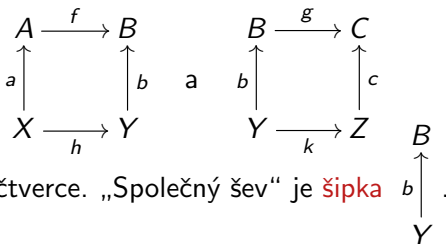
Skládání je „slepování“ šipek

Šipky $X \xrightarrow{f} Y$ a $Y \xrightarrow{g} Z$ slepíme za „společný šev“ Y a dostaneme $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Při dobrém šití nemá být šev vidět, tj., nakonec napíšeme šipku $X \xrightarrow{g \cdot f} Z$.

Funguje „slepování“ komutativních čtverců?

Ať

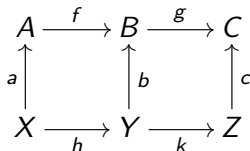


jsou komutativní čtverce. „Společný šev“ je **šipka** $Y \xrightarrow{b} B$.

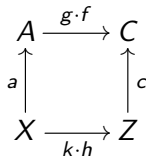
Jdou oba čtverce za tento šev slepit?

„Slepování“ komutativních čtverců funguje!

Slepíme za společný šev



a necháme šev zmizet



Výsledný čtverec je opět komutativní. ^a

^a**Důležité:** tuto techniku budeme často používat. Projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 **skript**.

Lineární zobrazení

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Báze lineárního prostoru a souřadnice vektoru vzhledem ke konečné uspořádané bázi.

Dnešní přednáška

- 1 Lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ zobecňuje zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$, dané konečnou uspořádanou bází B .
- 2 Zavedeme pojem **matice lineárního zobrazení** z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ (vzhledem ke kanonickým bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Definice (lineární zobrazení)

At' L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$, pro vš. $\vec{x}, \vec{x}'$ z L_1 , říkáme **lineární zobrazení** z L_1 do L_2 .

Příklady

- 1 At' L má uspořádanou bázi B o n prvcích. Zobrazení $\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n$ je lineární (minulá přednáška).
- 2 Řada dalších...

Poznámka (princip superposice)

$\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární právě tehdy, když platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{f}(\vec{x}_i)$$

pro vš. a_i z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}_i$ z L_1 .

Tvrzení (základní algebraické vlastnosti lineárních zobrazení)

- ① Složení lineárních zobrazení je lineární. Identita je lineární zobrazení.
- ② Jsou-li $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ a $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ lineární zobrazení, pak i zobrazení
 - ① $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ je lineární, kde $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\vec{x}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x})$.
 - ② $a \cdot \mathbf{f}$ je lineární (a je skalár z $\mathbb{F}$), kde $(a \cdot \mathbf{f})(\vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek (lineární prostor lineárních zobrazení)

Pro pevné lineární prostory L_1 a L_2 nad $\mathbb{F}$ je množina všech lineárních zobrazení z L_1 do L_2 lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Tento prostor značíme $\text{Lin}(L_1, L_2)$.

Věta (lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)

Ať B je báze^a lineárního prostoru L_1 , ať L_2 je libovolný lineární prostor. Pak zadat

① libovolné zobrazení $h : B \longrightarrow L_2$,

je totéž jako zadat

② lineární zobrazení $f : L_1 \longrightarrow L_2$.

^aPřipomenutí (téma 3A): každý lineární prostor má bázi.

Důkaz.

Pro prostory konečné dimenze: princip superposice.

Pro obecné prostory: mírně složitější.



Příklad (popis libovolného lineárního zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$)

Připomenutí: $K_s = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$ je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^s$.

Zadat lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ znamená zadat seznam s (ne nutně různých) hodnot

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{f}(\mathbf{e}_s) = \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ a_{3s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

v lineárním prostoru $\mathbb{F}^r$.

Tomuto seznamu říkáme **matice** (o r řádcích a s sloupcích).

Definice (matice)

Matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{F}$ o r řádcích a s sloupcích je tabulka^a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}$$

^aBudeme také používat **položkový zápis** $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ nebo **sloupcový zápis** $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$.

Nebudeme používat: matice typu $r \times s$, rozměrů $r \times s$, atd., případně **ještě horší značení** $n \times m$. (Nebo $m \times n$?) 🙄

Poznámka

Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ o r řádcích a s sloupcích **budeme ztotožňovat** s lineárním zobrazením

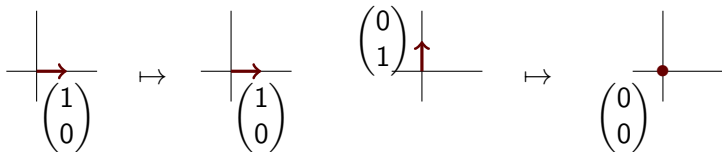
$$\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

z prostoru $\mathbb{F}^s$ do prostoru $\mathbb{F}^r$, a budeme psát $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Kanonická báze $K_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ v $\mathbb{R}^2$. Matice některých lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (vzhledem ke K_2) jsou:

- ① Projekce na osu x je ztotožněna s maticí $\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



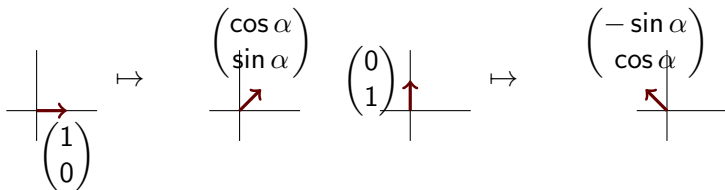
Analogicky: projekce na osu y je ztotožněna s maticí

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

- ② **Rotace** (o úhel α) je ztotožněna s maticí

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$



- ③ **Změna měřítka** ($a \neq 0$ a $b \neq 0$) je ztotožněna s maticí $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Pro $a = 1$, $b = -1$ dostaneme **reflexi**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad (matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$, pokrač.)

- ④ **Zkosení^a** (také: **shear**) je ztotožněno s maticí

$$\mathbf{S}_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

^aSpeciální typy zkosení (nad obecným tělesem) budou hrát důležitou roli při řešení soustav rovnic.

Co už nyní víme?

Například diagram

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_x} \mathbb{R}^2$$

znamená následující: **nejprve** otočte o úhel α , **potom** proved'te projekci na osu x .

Značit se to musí $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{R}_\alpha$ (jde o **skládání** lineárních zobrazení). Co ale „násobení tabulek“ znamená? Odpověď: **jde o novou matici**.

Jak novou matici najít?

$$\mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec matice } \mathbf{R}_\alpha \mapsto ???$$

- 1 Násobení (skládání) matic: **příští přednáška** (téma 4B).
- 2 Zbytek dnešní přednášky: **jak obecná matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ „zachází“ s obecným vektorem z prostoru $\mathbb{F}^s$?**

Tvrzení (výpočet hodnoty matice $\mathbf{A}$ v obecném vektoru $\mathbf{x}$)

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ a pro

vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ platí

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Důkaz.

Protože $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$, tak $\mathbf{A} : \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$. ■

Značení (násobení matice vektorem)

Vektor $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$ značíme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Příklad (rotace vektoru v $\mathbb{R}^2$)

Rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Potom součin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dává **výsledek otočení vektoru** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ o úhel α .

Například pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Poznámka (další význam zápisu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^s$, kóduje **hodnotu** lineárního zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ v bodě $\mathbf{x}$.

Zvolme **pevné** $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^r$. Hledejme **všechna** $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^s$ taková, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Na tento problém se lze dívat dvěma způsoby:

- 1 Hledáme **vzor** bodu $\mathbf{b}$ při lineárním zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$.
- 2 Řešíme **soustavu lineárních rovnic**.

Počet sloupců matice $\mathbf{A}$ je počet neznámých, počet řádků matice $\mathbf{A}$ je počet rovnic v soustavě.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ je } \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 8 \end{array}$$

Algebra matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.1, 2.2 a 4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Pojem **lineárního zobrazení** z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$ a jeho maticový zápis (vzhledem ke kanonickým bázím).

Dnešní přednáška

- 1 Zavedeme základní **algebraické operace s maticemi**.
- 2 V příští přednášce vše zobecníme pro prostory **konečných dimensí**; zavedeme pojem **matice lineárního zobrazení** (vzhledem k pevně zvoleným bázím).

Velmi důležité připomenutí

Vektory z prostoru $\mathbb{F}^n$ píšeme jako sloupce.

Již víme: $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Jak se operace v $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ projeví na „manipulaci s tabulkami“? Použijeme **sloupcový zápis** matic.

Pro $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ a $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s)$ a skalár a z $\mathbb{F}$ je:

- 1 $\mathbf{A} + \mathbf{B} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ matice se sloupcovým zápisem $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$. Zápis $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ čteme **součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$** .
- 2 $a \cdot \mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je matice se sloupcovým zápisem $(a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$. Zápis $a \cdot \mathbf{A}$ čteme **součin skaláru a a matice $\mathbf{A}$** .

Nulový vektor^a v lineárním prostoru $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je matice $\mathbf{O}_{s,r} = \underbrace{(\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o})}_{s\text{-krát}}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor v $\mathbb{F}^r$.

^aŘíkáme také: **nulová matice**.

Příklad: výpočty v $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

❶ Příklad součtu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

❷ Příklad skalárního násobku:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

❸ Nulový vektor v $\text{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je:

$$\mathbf{O}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poznámky k součtu matic a ke skalárnímu násobku matic

Sčítání matic a skalární násobení skalárem jsou operace v lineárním prostoru $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$. Přirozená čísla s a r jsou **pevná**. Proto:

- 1 Sčítat můžeme pouze matice **stejných** rozměrů. Pro matice různých rozměrů **není sčítání definováno**.

Sloupcový zápis součtu

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) + (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_s + \mathbf{b}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li sečíst dvě matice stejných rozměrů, sečtěte položky na odpovídajících pozicích.

- 2 Sloupcový zápis skalárního násobku

$$a \cdot (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s) = (a \cdot \mathbf{a}_1, \dots, a \cdot \mathbf{a}_s)$$

dává okamžitě „položkový návod“: chcete-li matici vynásobit skalárem, vynásobte tímto skalárem každou položku matice.

Vlastnosti součtu matic a skalárního násobku matic

Protože $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, platí:

- ❶ $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❷ $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, pro vš. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❸ $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$, pro vš. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❹ Pro každé $\mathbf{A}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ existuje právě jedno^a $\mathbf{B}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$ tak, že $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{s,r}$.
- ❺ $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ pro vš. $\mathbf{A}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❻ $a \cdot (b \cdot \mathbf{A}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a vš. $\mathbf{A}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❼ $a \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \cdot \mathbf{A} + a \cdot \mathbf{B}$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.
- ❽ $(a + b) \cdot \mathbf{A} = a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{A}$ pro vš. a, b z $\mathbb{F}$ a pro vš. $\mathbf{A}$ z $\text{Lin}(\mathbb{F}^s, \mathbb{F}^r)$.

^aTomuto jednoznačně určenému $\mathbf{B}$ říkáme **opačná** matice k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $-\mathbf{A}$.

Připomenutí značení (téma 04A)

Matice $\mathbf{A}$ se sloupcovým zápisem $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{F}^s$ do $\mathbb{F}^r$, dané předpisem

$$\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, s$$

Princip superposice dává

$$\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j \mapsto \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$$

Pro $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{e}_j$ značíme $\sum_{j=1}^s x_j \cdot \mathbf{a}_j$ jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Proto

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Definice (součin matic)

Pro situaci^a

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{\mathbf{A}} & \mathbb{F}^p \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbb{F}^r \\ \mathbf{e}_j \longmapsto & \mathbf{a}_j \longmapsto & \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j \end{array}$$

je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice,^b jejíž j -tý sloupec je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_j$, kde $\mathbf{a}_j$ je j -tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Ve sloupcovém zápisu tedy platí
 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_s).$

Matici $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ říkáme **součin matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$** .

^aDiagram okamžitě dává **rozměrovou zkoušku** pro součin matic $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: počet řádků matice $\mathbf{A}$ musí být roven počtu sloupců matice $\mathbf{B}$. **Jindy součin matic nedefinujeme, protože by skládání nedávalo smysl.**

^b**Položkový zápis** součinu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$: pro $\mathbf{A} = (a_{kj})_{k=1,\dots,p,j=1,\dots,s}$ a $\mathbf{B} = (b_{ik})_{i=1,\dots,r,k=1,\dots,p}$ je $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ matice s položkami $(c_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$, kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} \cdot a_{kj}$$

Příklad (matice složených lineárních transformací v $\mathbb{R}^2$)

Projekce na osu x : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, rotace (o úhel α): $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** otočte o úhel α , **potom** spočtete projekci na osu x “.

Součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení „**nejprve** spočtete projekci na osu x , **potom** otočte o úhel α “.

Příklad (reflexe podle osy, která svírá úhel α s osou x)

Jde o složené zobrazení: **nejdříve** rotace o úhel $-\alpha$, **potom** reflexe, **nakonec** rotace o úhel α .

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Poznámka

Analogicky lze vytvořit matice základních lineárních transformací v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Aplikace: matematická analýza, fyzika, grafika.^a

^a**Důležité:** projděte si podrobně Příklady 4.1.6 a 4.2.9 **skript**.

Shrnutí: Vlastnosti operací s maticemi

- 1 Pro součin **platí** asociativní zákon $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$, kdykoli jsou jednotlivé součiny definovány.
- 2 Obecně **neplatí** komutativní zákon $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (i když jsou oba součiny definovány).
- 3 Pro každé n definujeme **jednotkovou matici**^a $\mathbf{E}_n : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ takto: $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, kde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou vektory kanonické báze $\mathbb{F}^n$.

Potom pro každou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ platí:

$$\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_s.$$

^aMatice $\mathbf{E}_n$ je maticí **identického** lineárního zobrazení $\text{id} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$.

Důkaz.

Okamžitě z vlastností lineárních zobrazení.



Příklad (popis řešení soustavy lineárních rovnic v $\mathbb{R}^2$)

Ať $\mathbf{P}_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je projekce na osu x , ztotožněná s maticí

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Víme, že zápis $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (pro pevně zadaný vektor $\mathbf{b}$) kóduje soustavu lineárních rovnic. Pojd' me ji vyřešit.

- ❶ Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na $\mathbf{b}$ projekcí $\mathbf{P}_x$ zobrazí.

Protože vektor $\mathbf{b}$ **není** funkční hodnotou matice $\mathbf{P}_x$, **nemá** soustava $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešení.

- ❷ Pro vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nás zajímají všechny vektory $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, které se na $\mathbf{b}$ projekcí $\mathbf{P}_x$ zobrazí.

Jeden takový vektor $\mathbf{x}$ jistě existuje, například vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}. \text{ Jak popsat množinu všech řešení?}$$

Popis množiny všech řešení soustavy $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je množina všech vektorů $\mathbf{x}$ tvaru $\mathbf{p} + \mathbf{x}_h$, kde $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ a kde vektor $\mathbf{x}_h$ splňuje rovnost $\mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}$.

Množinu všech řešení lze tedy napsat ve tvaru

$$\mathbf{p} + \{\mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{x}_h = \mathbf{0}\}$$

Jak uvidíme, tento způsob zápisu řešení bude mít mnohé výhody.

Důsledek

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ musíme studovat chování dvou množin

$$\{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in L_1\}$$

tzv. **obraz** $\mathbf{f}$

$$\{\vec{x} \in L_1 \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{0}\}$$

tzv. **jádro** $\mathbf{f}$

Lineární zobrazení: část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.3, 3.4 a 9.1 skriptu *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ (sloupcový zápis matice, každý sloupec $\mathbf{a}_j$ je vektor z $\mathbb{F}^r$) je **ztotožněna** s lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r, \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$.

Operace s maticemi odpovídají operacím s lineárními zobrazeními.

Dnešní přednáška

- 1 Pojmy **jádro**, **obraz**, **defekt** a **hodnost** lineárního zobrazení.

Tyto pojmy umožní jemnější klasifikaci lineárních zobrazení.

- 2 Pojem matice **obecného** lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k **obecným** uspořádaným bázím. Prostory L_1 a L_2 musí mít konečnou dimenzi.

Připomenutí (témata 04A a 03B)

- 1 At' L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}, \vec{x}'$ z L_1 , říkáme **lineární zobrazení** z L_1 do L_2 .
- 2 Zápis $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ znamená^a $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec } \mathbf{A}$.
Značení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$.
- 3 Komutativní čtverec

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\mathbf{g}} & L_2 \\ \mathbf{f} \uparrow & & \uparrow \mathbf{k} \\ L_3 & \xrightarrow{\mathbf{h}} & L_4 \end{array}$$

pro lineární zobrazení znamená rovnost $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ lineárních zobrazení.

^aV terminologii dnešní přednášky: $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ je maticí zobrazení $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j\text{-tý sloupec } \mathbf{A}$ vzhledem ke kanonické bázi. Ale nepředbímejme 😊

Definice (speciální vlastnosti lineárních zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$ říkáme:^a

- 1 **monomorfismus**, je-li f injektivní (také: prosté) zobrazení.
- 2 **epimorfismus**, je-li f surjektivní (také: na) zobrazení.
- 3 **isomorfismus**, je-li f bijektivní (také: prosté a na) zobrazení.^b

^aZ řečtiny: $\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ =jediný, $\epsilon\pi\acute{\iota}$ =na, $\acute{\iota}\varsigma\omega\varsigma$ =stejný, $\mu\omicron\rho\phi\acute{\eta}$ =tvar.

^bEkvivalentně: k zobrazení f existuje inverzní zobrazení f^{-1} a toto inverzní zobrazení je opět lineární.

Tvrzení

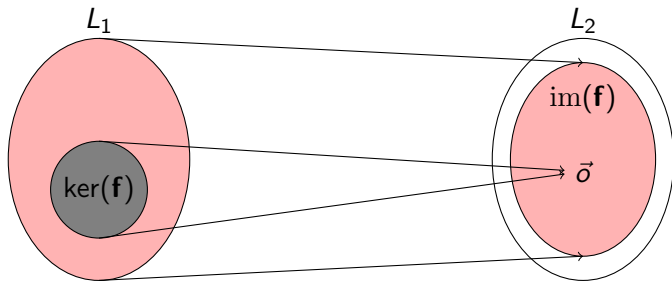
Složení monomorfismů/epimorfismů/isomorfismů je monomorfismus/epimorfismus/isomorfismus. Identita je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška.

Definice (obraz a jádro)

At' $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení. Množině^a
 $\ker(f) = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{o}\}$ říkáme **jádro** f , množině
 $\operatorname{im}(f) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in L_1\}$ říkáme **obraz** f .



^aZ německého **der Kern** (jádro).

Slogany (tj. reklamní hesla, nikoli skutečnost)

Jádro f říká, jak moc je f monomorfismus.

Obraz f říká, jak moc je f epimorfismus.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení. Pak $\ker(\mathbf{f})$ je podprostor L_1 , $\operatorname{im}(\mathbf{f})$ je podprostor L_2 .^a

^aObecněji: $\{\mathbf{f}(\vec{w}) \mid \vec{w} \in W\}$ je podprostor L_2 , pro jakýkoli podprostor W prostoru L_1 .

Důkaz.

Přednáška. 

Definice (defekt a hodnost lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má **konečnou** dimensi. Číslu $\operatorname{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$ říkáme **defekt**^a lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ a číslu $\operatorname{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\operatorname{im}(\mathbf{f}))$ říkáme **hodnost** (také: **rank**) lineárního zobrazení $\mathbf{f}$.

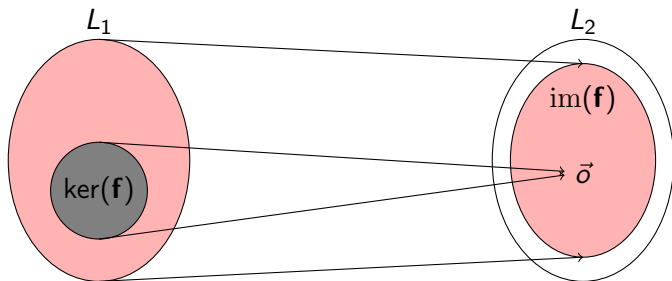
^aV anglické literatuře se používá i terminologie **nullity**, značeno $\operatorname{null}(\mathbf{f})$.

Tvrzení (Věta o dimenzi jádra a obrazu)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimenzi. Pak $\text{def}(\mathbf{f}) + \text{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_1)$.

Důkaz.

Bez důkazu (důkaz je například ve [skriptech](#), Věta 3.3.6).



$$\text{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$$

$$\text{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\text{im}(\mathbf{f}))$$



Tvrzení (charakterisace monomorfismů)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak je ekvivalentní:

- 1 $\mathbf{f}$ je monomorfismus.
- 2 $\text{def}(\mathbf{f}) = 0$ (tj., platí $\ker(\mathbf{f}) \subseteq \{\vec{0}\}$).
- 3 $\mathbf{f}$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina).

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek (monomorfismy a soustavy rovnic)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je monomorfismus, ať L_1 a L_2 mají konečnou dimensi. Potom $\dim(L_1) \leq \dim(L_2)$.

Tvrzení (charakterisace isomorfismů)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má **konečnou** dimensi. Pak je ekvivalentní:

- 1 f je isomorfismus.
- 2 f je monomorfismus a epimorfismus současně.
- 3 $\text{def}(f) = 0$ a $\text{im}(f) = L_2$ současně.
- 4 $\text{def}(f) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.
- 5 Pro **každé** $\vec{b}$ v L_2 má rovnice $f(\vec{x}) = \vec{b}$ má **právě jedno** řešení.

Důkaz.

Přednáška. 

Důsledek (isomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ je isomorfismus právě tehdy, když $s = r$ a každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.

Definice (regulární a singulární matice)

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ typu je regulární (také: invertibilní, také: isomorfismus), pokud existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}^{-1}$ taková, že platí rovnosti $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Matici $\mathbf{A}^{-1}$ říkáme inverse matice $\mathbf{A}$.

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je singulární, pokud není regulární.

Příklad (rotace o úhel α v $\mathbb{R}^2$ je isomorfismus)

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

je regulární (invertibilní) matice.^a

^aInversním zobrazením rotace $\mathbf{R}_\alpha$ o úhel α je rotace $\mathbf{R}_{-\alpha}$ o úhel $-\alpha$.

Důsledek (isomorfismy prostorů konečné dimenze)

Ať $\dim(L_1) = \dim(L_2) = n$. Potom je, pro lineární zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$, ekvivalentní:

- ❶ f je monomorfismus.
- ❷ f je epimorfismus.
- ❸ f je isomorfismus.

Příklad (důležité a užitečné: Lagrangeova interpolace)

Ať $a_1, \dots, a_n$ jsou navzájem různá reálná čísla. Lineární zobrazení

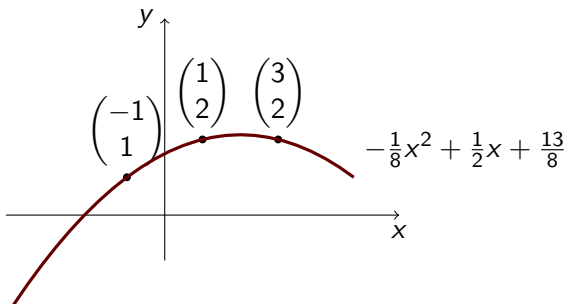
$$\text{ev}_{(a_1, \dots, a_n)} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}$$

je monomorfismus, tudíž isomorfismus.

Příklad (Lagrangeova interpolace, pokrač.)

$\text{ev}_{(a_1, \dots, a_n)}$ je isomorfismus: pro každou n -tici $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^n$ existuje

jediný polynom^a $p_{(b_1, \dots, b_n)}(x)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$ tak, že platí $p_{(b_1, \dots, b_n)}(a_i) = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.



^aRíká se mu **Lagrangeův interpolační polynom**, viz **skripta**, Příklad 3.3.9.

Tvrzení (důležité)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze prostoru L . Potom
výpočet souřadnic v bázi B

$$\text{coord}_B : L \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \vec{x} \mapsto \text{coord}_B(\vec{x})$$

je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška. 

Poznámka (důležitá)

Protože isomorfní lineární prostory se z abstraktního hlediska nijak neliší, vidíme: až na isomorfismus neexistují jiné konečně dimensionální lineární prostory nad $\mathbb{F}$ než prostory tvaru $\mathbb{F}^n$.

Definice (matice lineárního zobrazení)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . **Matice zobrazení f** (vzhledem k B a C) je taková matice $\mathbf{A}_f$, pro kterou platí

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^s & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{A}_f \cdot x} & \mathbb{F}^r \\ \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\ L_1 & \xrightarrow{f} & L_2 \end{array}$$

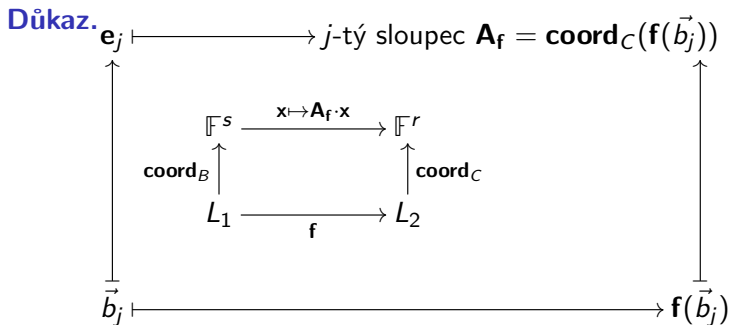
neboli:

$$\begin{array}{ccc} \text{coord}_B(\vec{x}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A}_f \cdot \text{coord}_B(\vec{x}) = \text{coord}_C(f(\vec{x})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vec{x} & \xrightarrow{\quad} & f(\vec{x}) \end{array}$$

pro každý vektor $\vec{x}$.

Tvrzení (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $f : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . Potom matice $\mathbf{A}_f$ má r řádků a s sloupců. Navíc j -tý sloupec matice $\mathbf{A}_f$ je tvořen souřadnicemi $\text{coord}_C(f(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.



Příklad (výpočet matice lineárního zobrazení)

Lineární zobrazení

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] &\rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x], \\ (ax^3 + bx^2 + cx + d) &\mapsto (-6ax^2 + 3cx + 7d) \end{aligned}$$

má matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím $B = (x, x^3, x^2, 1)$ a $C = (1, x, x^2)$.

Například

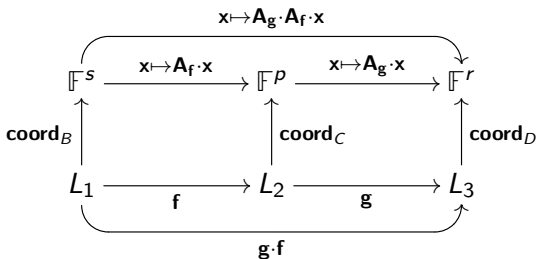
Diagram illustrating the mapping of the basis vector x^3 to the second column of the matrix:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_2 & \xrightarrow{\quad} & \text{2. sloupec hledané matice} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow \\ x^3 & \xrightarrow{\quad} & -6x^2 \end{array}$$

Věta (matice složeného zobrazení)

At' L_1, L_2, L_3 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$, $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_p)$ a $D = (\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_r)$. At' $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ a $\mathbf{g} : L_2 \rightarrow L_3$ jsou lineární zobrazení s maticemi $\mathbf{A}_f$ (vzhledem k B a C) a $\mathbf{A}_g$ (vzhledem k C a D). Potom $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_3$ má matici $\mathbf{A}_g \cdot \mathbf{A}_f$ (vzhledem k B a D).

Důkaz.



Příklad (výpočet matice pro derivování)

Lineární zobrazení

$$\begin{aligned} \mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] &\rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x], \\ (ax^3 + bx^2 + cx + d) &\mapsto (3ax^2 + 2bx + c) \end{aligned}$$

má následující matici^a vzhledem k bázi $B = (x^3, x^2, x^1, 1)$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pro druhou derivaci: spočítáme součin $\mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}}$, atd.

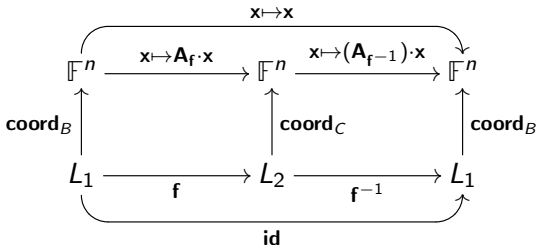
^a**Terminologie:** matice vzhledem k B znamená vzhledem k B a B .

Věta (matice isomorfismu)

Ať L_1, L_2 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$, $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$. Ať lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je isomorfismus s maticí zobrazení $\mathbf{A}_f$ (vzhledem k B a C). Potom existuje jednoznačně určená matice $(\mathbf{A}_f)^{-1}$ splňující rovnosti $(\mathbf{A}_f)^{-1} \cdot \mathbf{A}_f = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_f \cdot (\mathbf{A}_f)^{-1}$. Matice $(\mathbf{A}_f)^{-1}$ je matice $\mathbf{A}_{f^{-1}}$ inverzního zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ (vzhledem k C a B).^a

^aTj. regulární (invertibilní) matice jsou přesně matice isomorfismů.

Důkaz.



Proto $\mathbf{A}_f^{-1} \cdot \mathbf{A}_f = \mathbf{E}_n$. Druhá rovnost analogicky.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nekanonické bázi)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy:

- ① „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
- ② „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

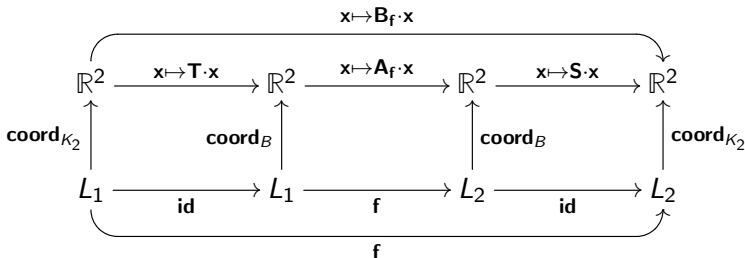
Vzhledem k **nekanonické** bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ má tedy $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jak spočítat matici $\mathbf{B}_{\mathbf{f}}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem ke **kanonické** bázi K_2 ?

Příklad (pokrač.)

Myšlenka řešení: hledaná matice $\mathbf{B}_f$ musí splňovat rovnici $\mathbf{B}_f = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, kde



Jak najít matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$? **Jednoduše:** jsou to matice identického zobrazení, navíc evidentně platí $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Příklad (pokrač.)

Platí (díky tomu, co jsme již dokázali)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Příští přednáška (téma 05B)

Konceptuální hledání (analogií) matic $\mathbf{T}$ a $\mathbf{S}$: takzvané **matice transformace souřadnic**.

Transformace souřadnic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 9.2 a 9.3 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulá přednáška

- 1 Lineární zobrazení.
- 2 Výpočet souřadnic vzhledem k bázi je lineární zobrazení.
- 3 Matice libovolného lineárního zobrazení mezi lineárními prostory konečné dimenze vzhledem k pevně zvoleným bázím.

Dnešní přednáška

- 1 Matice transformace souřadnic v jedné bázi na souřadnice ve druhé bázi. Jde opět o matici jistého lineárního zobrazení.
- 2 Uvidíme, že pro stále více problémů je třeba se naučit řešit maticové soustavy.^a

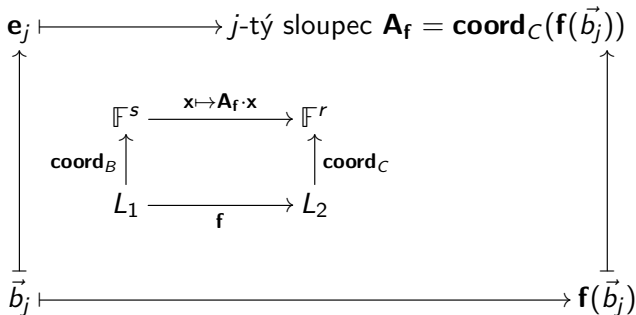
^aŘadu příkladů tedy v této přednášce nedopočítáme až do konce.

Příští přednáška

- 1 Konceptně čistý a geometricky jasný způsob řešení soustav lineárních rovnic, maticových rovnic, atd.

Připomenutí (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2 . Potom matice $\mathbf{A}_f$ má r řádků a s sloupců a j -tý sloupec matice $\mathbf{A}_f$ je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.



Definice (matice transformace souřadnic)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ a $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ jsou uspořádané báze prostoru L . Matici^a $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$, která splňuje

$$\begin{array}{ccc}
 \vec{e}_j \vdash & \xrightarrow{\quad} & j\text{-tý sloupec } \mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{coord}_C(\vec{b}_j) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot x} & \mathbb{F}^n \\
 \text{coord}_B \uparrow & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L & \xrightarrow{\text{id}} & L
 \end{array} & & \\
 \vec{b}_j \vdash & \xrightarrow{\quad} & \vec{b}_j
 \end{array}$$

říkáme **matice transformace souřadnic z báze B do báze C** (také: **matice transformace souřadnic v bázi B na souřadnice v bázi C**).

^aVšimněte si značení: v dolním indexu $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je šipka s patkou (bázi B „posíláme“ na bázi C).

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace souřadnic)

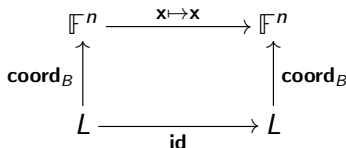
- ① Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\vec{x})$, pro každý vektor $\vec{x}$ v L .
To plyne přímo z definice matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}^n & \xrightarrow{x \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot x} & \mathbb{F}^n \\
 \uparrow \text{coord}_B & & \uparrow \text{coord}_C \\
 L & \xrightarrow{\text{id}} & L
 \end{array}$$

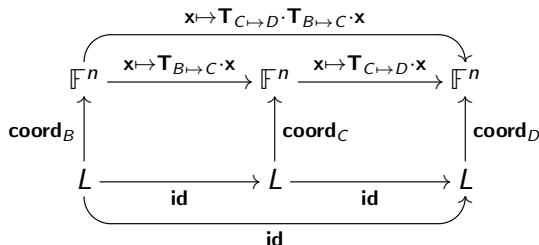
- ② Matice $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je **vždy regulární**. Platí $(\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1} = \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.
To plyne z toho, že $\text{id} : L \rightarrow L$ je isomorfismus.

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace, pokrač.)

- 3 Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$. To je triviální:



- 4 Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto D} = \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C}$. To plyne z vlastností matice složeného zobrazení:



Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ nad $\mathbb{R}$ máme uspořádané báze $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = ((x-1)^3, (x-1)^2, x-1, 1)$.

Pro polynom $p(x) = -3x^2 + 6x + 3$ z $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ hledáme $\mathbf{coord}_C(p(x))$. Víme, že $\mathbf{coord}_C(p(x)) = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(p(x))$.

Protože $\mathbf{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, stačí tedy znát^a matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$.

$$\mathbf{T}_{B \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

^aUvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1}$ lze využít **blokový tvar Gaussovy eliminace**:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto B} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1})$$

Poznámka (konceptuální výpočet $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ v prostoru $\mathbb{F}^n$)

Ať $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ jsou libovolné báze prostoru $\mathbb{F}^n$.

Připomenutí: kanonická (také: standardní) báze $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{F}^n$.

① Je snadné nalézt matice $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ a $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n}$.

- ① Do j -tého sloupce $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{b}_j$ v kanonické bázi K_n .
- ② Do j -tého sloupce $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{c}_j$ v kanonické bázi K_n .

② $\mathbf{T}_{B \mapsto C} = \mathbf{T}_{K_n \mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = (\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$.

Stačí tedy vyřešit^a maticovou rovnici $\mathbf{T}_{C \mapsto K_n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$.

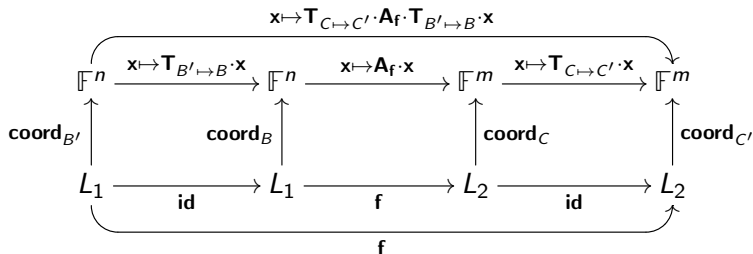
^aUvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto K_n} \mid \mathbf{T}_{B \mapsto K_n}) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n})$$

Věta (změna matice zobrazení při změně bází)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \rightarrow L_2$ je lineární zobrazení, $\dim(L_1) = n$, $\dim(L_2) = m$.
 Ať B a B' jsou báze prostoru L_1 a ať C a C' jsou báze prostoru L_2 .
 Jestliže $\mathbf{A}_f$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B a C , pak součin
 $\mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B' a C' .

Důkaz.



Báze „typu easy“ v obecném lineárním prostoru a transformační matice

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$ dimenze n . Ať v L existuje uspořádaná báze $easy = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ taková, že hodnoty $\mathbf{coord}_{easy}(\vec{x})$ se počítají „snadno“.^a Takovým bázím budeme říkat **báze typu easy**.

Potom, pro jakoukoli uspořádanou bázi B prostoru L , lze matici $\mathbf{T}_{B \mapsto easy}$ spočítat „snadno“.

Obecnou transformační matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ pak lze spočítat jako součin

$$\mathbf{T}_{easy \mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto easy} = \underbrace{\left(\mathbf{T}_{C \mapsto easy} \right)^{-1}}_{\text{snadno}} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{B \mapsto easy}}_{\text{snadno}}$$

^a Je jasné, že nejde o definici ve striktním smyslu. Co to znamená „snadno“?

Příklad (matice zobrazení vzhledem k „nepěkné“ bázi)

Nalezněte matici **A** zobrazení **der** : $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ vzhledem k bázi $C = (x^3 + 3x^2, 3x^2 + 4x - 23, x - 1, 42)$.

Víme, že **der** má následující matici vzhledem k $B = (x^3, x^2, x, 1)$:

$$\mathbf{A}_{\text{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$\mathbf{T}_{C \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -23 & -1 & 42 \end{pmatrix}$$

Tedy: $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{A}_{\text{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\text{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.

Závěrečné poznámky k transformaci souřadnic

- ① **Jakoukoli** čvercovou regulární matici $\mathbf{T}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ lze považovat za matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$, kde K_n je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$ a báze B je tvořena sloupci matice $\mathbf{T}$.
- ② Je-li $\mathbf{A}_f$ matice zobrazení $f : L_1 \rightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C , pak matice zobrazení f vzhledem k nějakým bázím B' a C' má tvar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějaké regulární matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$.

Speciální případ: $L_1 = L_2$, $B = C$ a $B' = C'$. Pak matice $\mathbf{A}_f$ přejde na matici tvaru $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Poznámky (pokrač.)

- ③ Řekneme, že dvě matice **A** a **B** typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si **podobné** (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici **T**.

Podobné matice jsou tedy ty, které popisují **stejné lineární zobrazení**, každá matice jej vyjadřuje **v jiné bázi**. To využijeme při hledání vlastních hodnot lineárních zobrazení (později).

Příklad (Připomenutí příkladu z minulé přednášky)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení **f** tedy:

- ① „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
- ② „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Příklad (pokrač.)

Vzhledem k **nekanonické** bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vzhledem ke **kanonické** bázi K_2 lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici^a

$$\mathbf{B}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Platí: $\mathbf{A}_{\mathbf{f}} \approx \mathbf{B}_{\mathbf{f}}$.

Matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ je „přehlednější“ než matice $\mathbf{B}_{\mathbf{f}}$ (matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ vypovídá okamžitě o **geometrické povaze** zobrazení $\mathbf{f}$).

^aMinulá přednáška, téma 05A.

GEM a soustavy lineárních rovnic: část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 6 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Minulé přednášky

- 1 Matice jako (speciální) lineární zobrazení. Obecná lineární zobrazení lze reprezentovat maticí (vzhledem k zadaným bázím).
- 2 Algebra matic (sčítání matic, násobení matic skalárem, násobení matic mezi sebou).
- 3 Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kóduje soustavu lineárních rovnic.

Dnešní přednáška

- 1 Gaussova eliminační metoda (GEM) jako **universální a systematická metoda** řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Příští přednáška

- 1 Maticové rovnice.
- 2 Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Připomenutí (maticový zápis soustavy lineárních rovnic)

Zápis $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice nad $\mathbb{F}$ o r řádcích a s sloupcích, $\mathbf{x}$ je v $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{b}$ je v $\mathbb{F}^r$, kóduje **soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{F}$** .

Terminologie: $\mathbf{A}$ je **matice soustavy**, $\mathbf{b}$ je **pravá strana rovnice**, $\mathbf{x}$ je **vektor neznámých**. Matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ (také: $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$) je **rozšířená matice soustavy**.

Například

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -42 \end{pmatrix}$$

je zápis soustavy

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & -42 \end{array}$$

nad $\mathbb{R}$.

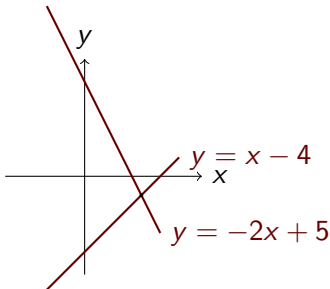
Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav)

Pro soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

nad $\mathbb{R}$ je řešení

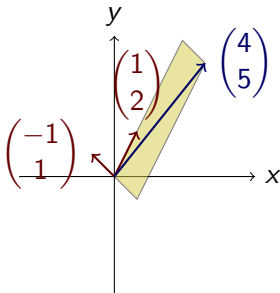
- 1 Průsečík dvou přímek: $x - y = 4$ a $2x + y = 5$:



Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav, pokrač.)

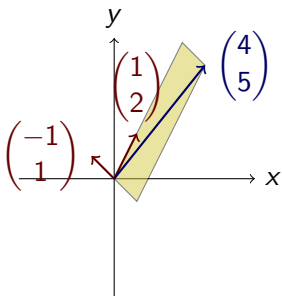
- ② Pravá strana je lineární kombinací sloupců matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

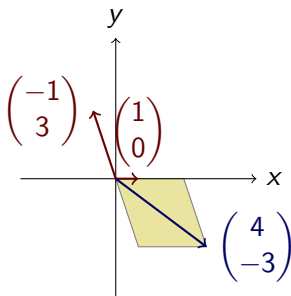


Řešení jsou koeficienty této lineární kombinace.

Výhoda druhého pohledu na řešení soustav



lze převést isomorfismem na



Koeficienty lineární kombinace situace napravo se najdou snadno.

Gaussova eliminační metoda je přesně postupné převádění vhodnými isomorfismy do příjemné polohy!

Ve zbytku přednášky

- 1 Zaměříme se na problém řešení soustav tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Konvence: Nebude-li řečeno jinak, je soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve zbytku přednášky soustavou r rovnic o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

Soustavy budeme většinou zapisovat rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nebo $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$.

Zformulujeme a dokážeme důležitý výsledek: **Frobeniovu větu** o řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

- 2 Jako technický prostředek použijeme **Gaussovu eliminační metodu** (zkráceně: **GEM**). GEM převádí matice (a tím i soustavy) na „příjemný“ tvar.

Věta (Frobenius)

- 1 Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když platí rovnost $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
- 2 Pokud $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, potom lze říci následující:
Zvolme jakékoli $\mathbf{p}$, splňující rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
Potom $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})\}$ je množina všech řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Důkaz.

- 1 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když $\mathbf{b}$ je v $\text{im}(\mathbf{A})$. To nastane právě tehdy,^a když $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$. Viz str 12, téma 03A.
- 2 Triviální.

^aVyužíváme jednoduchých pozorování: $\text{im}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$ a $\text{im}(\mathbf{A}) \vee \text{span}(\mathbf{b}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}) = \text{im}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Potřebujeme rychle a pohodlně zjistit následující

- 1 $\text{rank}(\mathbf{A})$, $\text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
- 2 Nalézt $\mathbf{p}$ tak, aby $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$, a popsat (bázi prostoru) $\ker(\mathbf{A})$.

Základní myšlenka

Soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ mají **stejně** množiny řešení, jakmile $\mathbf{P}$ je **isomorfismus**.^a Navíc platí: $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})$ a $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})$ a $\text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \text{rank}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$.

Zbývá tedy **nalézt isomorfismus** $\mathbf{P}$ tak, aby soustava $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ „byla v hezkém tvaru“.

^aSrovnajte s: rovnice $2x = 7$ má stejnou množinu řešení jako rovnice $3 \cdot 2x = 3 \cdot 7$, protože 3 má inverzi.

Definice (ekvivalentní soustavy)

Řekneme, že soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ r rovnic o s neznámých jsou **ekvivalentní**^a (značení: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$), když pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$ platí: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

^a**Slogan:** Ekvivalentní soustavy **stejných** rozměrů mají stejná řešení.

Definice (horní blokový tvar matice)

Matice $\mathbf{M}$ je v **horním blokovém tvaru**, jsou-li splněny následující dvě podmínky:^a

- 1 Každý nenulový řádek matice $\mathbf{M}$ je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
- 2 Každý **pivot** (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice $\mathbf{M}$ je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

^aPozorování: $\mathbf{M}$ je v horním blokovém tvaru iff $(\mathbf{M} \mid \mathbf{o})$ je v horním blokovém tvaru.

Příklad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je v horním blokovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{31} & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{23} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{42} & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

Není v horním blokovém tvaru.



Věta (Gaussova eliminační metoda (GEM) nad $\mathbb{F}$)

Jakoukoli matici $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{F}$ lze konečným počtem tzv. **řádkových elementárních úprav** převést na horní blokový tvar.

Řádkové elementární úpravy jsou tří typů:

- (I) Prohození dvou řádků v matici.
- (II) Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem.
- (III) Přičtení skalárního násobku řádku matice k jinému řádku matice.

Důkaz.

Nebudeme dělat (viz **skripta**, Věta 6.3.10.).

Poznámky

GEM: použití řádkových elementárních úprav dané matice **s cílem** zapsat danou matici v horním blokovém tvaru. Při dosažení tohoto tvaru říkáme, že **GEM skončila**.

Příklad (prohození dvou řádků v matici)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{matrix}$$

Tudíž: prohození dvou řádků je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -20 & -5 & -35 & -15 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ -5R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

Tudíž: vynásobení řádku matice nenulovým skalárem je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$ z $\mathbb{R}^3$.

Příklad (Přičtení skalárního násobku řádku k řádku)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 11 & 21 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_1 \end{matrix}$$

Tudíž: přičtení skalárního násobku řádku k danému řádku je dáno isomorfismem $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, aplikovaným na čtveřici vektorů $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4) \in \mathbb{R}^3$.

Shrnutí

Ať $\mathbf{M}$ je jakákoli nad $\mathbb{F}$ o r řádcích. Potom platí:

- 1 Každá elementární úprava matice $\mathbf{M}$ je dána součinem $\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ pro vhodný „elementární“ isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$.
- 2 Je-li matice $\mathbf{M}'$ horním blokovým tvarem^a matice $\mathbf{M}$, pak
 - 1 Existuje isomorfismus $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ tak, že $\mathbf{M}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$ a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_1$, kde k je nějaké přirozené číslo a $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ jsou „elementární“ isomorfismy.
 - 2 Platí $\text{rank}(\mathbf{M}) = \text{rank}(\mathbf{M}')$ a $\text{def}(\mathbf{M}) = \text{def}(\mathbf{M}')$.

Speciálně: pro $\mathbf{M}$ ve tvaru $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ lze elementárními úpravami převést každou soustavu na horní blokový tvar $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$. Navíc platí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$.

^a**Důležité:** nikdy jsme neříkali, že při elementárních úpravách lze vyškrtávat nulové řádky. **Vyškrtávat nulové řádky při GEM nebudeme;** matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ musí mít stejné rozměry!

Důsledky

- 1 Hodnost matice $\mathbf{M}$ je rovna počtu pivotů v horním blokovém tvaru po skončení GEM.
- 2 Pro každou matici $\mathbf{M}$ platí $\text{rank}(\mathbf{M}) = \text{rank}(\mathbf{M}^T)$, kde $\mathbf{M}^T$ je **transponovaná matice**^a k matici $\mathbf{M}$.
- 3 Defekt matice $\mathbf{M}$ je roven počtu sloupců matice $\mathbf{M}$ mínus hodnost matice $\mathbf{M}$.

^aMatice $\mathbf{M}^T$ má jako své sloupce původní řádky matice $\mathbf{M}$ zapsané ve stejném pořadí. Například pro

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Příklad (ukázka systematického řešení soustavy nad $\mathbb{R}$)

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ (maticově: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right)$).
 Pro matici soustavy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ platí rovnosti $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$ a $\text{def}(\mathbf{A}) = 2$. **Pivot je na první pozici:** **volit** budeme vždy druhou a třetí položku, první položku **dopočteme**.

- ❶ $\ker(\mathbf{A})$ je řešení soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$.

$$\text{Báze } \ker(\mathbf{A}) \text{ je } \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- ❷ Partikulární řešení pro $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right)$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- ❸ Množina všech řešení $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Příklad (geometrický význam postupu řešení soustavy)

Rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ v $\mathbb{R}^3$ popisuje rovinu ρ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Tato rovina ρ je v obecné poloze (rovina ρ neprochází počátkem, protože $2 \neq 0$).

- 1 Rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$ je paralelní posunutí roviny ρ tak, aby výsledná rovina ρ_h procházela počátkem.

Báze $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ jádra je systém souřadnic v rovině ρ_h .

- 2 Partikulární řešení rovnice $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ je libovolný bod $\mathbf{p}$ v původní rovině ρ .
- 3 Zápis $\mathbf{p} + \text{span}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\})$ obecného řešení vyjadřuje opětovné paralelní posunutí roviny ρ_h zpět do roviny ρ .

Poznámka

Stejnou geometrickou představu je třeba mít pro řešení obecné soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nad $\mathbb{F}$.

Příklad (systematické řešení komplikovanější soustavy nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & | & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - R_3 \end{matrix}$$

Důležité: povšimněme si značení řádkových úprav; **úpravy budeme vždy takto vyznačovat.**

Příklad (pokrač.)

Po skončení GEM $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ jsou pivoty na čtvrté,

druhé a první posici. Tyto položky v řešení budeme **dopočítávat**,
 třetí položku řešení budeme **volit**.

Množina všech řešení je: $\begin{pmatrix} 33/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

Vylepšený zápis: $\begin{pmatrix} 33/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

Řešením soustavy je **přímka** v $\mathbb{R}^4$.

GEM a soustavy lineárních rovnic: část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 6 a 7.1
skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Gaussova eliminační metoda (GEM) jako **universální a systematická metoda** řešení soustav lineárních rovnic (nad $\mathbb{F}$).

Dnešní přednáška

- 1 Lineární maticové rovnice.
- 2 Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Příklad

Nalezněte všechny matice $\mathbf{X}$, které splňují rovnost^a

$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$, kde $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je matice rotace o úhel α , $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Rozměrová zkouška: musí platit $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Rešenými jsou například matice $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{O}_{2,2}$ a $\mathbf{R}_\alpha$.

Jak nalézt **všechna** řešení? Předvedeme **universální** metodu.

❶ Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x_{11} - \sin \alpha \cdot x_{21} & \cos \alpha \cdot x_{12} - \sin \alpha \cdot x_{22} \\ \sin \alpha \cdot x_{11} + \cos \alpha \cdot x_{21} & \sin \alpha \cdot x_{12} + \cos \alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x_{11} + \sin \alpha \cdot x_{12} & -\sin \alpha \cdot x_{11} + \cos \alpha \cdot x_{12} \\ \cos \alpha \cdot x_{21} + \sin \alpha \cdot x_{22} & -\sin \alpha \cdot x_{21} + \cos \alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix}.$$

^a**Geometrický význam:** hledáme všechny transformace $\mathbf{X}$ roviny, které jsou **záměnné** s rotací o úhel α .

Příklad (pokrač.)

- ② Rovnost $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$ je ekvivalentní rovnosti
 $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{O}_{2,2}$. Stačí tedy vyřešit soustavu **čtyř** rovnic

$$\begin{array}{rclcl} & -\sin \alpha \cdot x_{21} & -\sin \alpha \cdot x_{12} & = & 0 \\ \sin \alpha \cdot x_{11} & & & -\sin \alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\ \sin \alpha \cdot x_{11} & & & -\sin \alpha \cdot x_{22} & = & 0 \\ & \sin \alpha \cdot x_{21} & +\sin \alpha \cdot x_{12} & = & 0 \end{array}$$

V maticovém zápisu (po skončení GEM) máme řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sin \alpha & 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

v závislosti na parametru $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Příklad (pokrač.)

③ Pro $\sin \alpha = 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a tudíž řešení je tvaru $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, kde x_{11} , x_{21} , x_{12} a x_{22} jsou libovolná reálná čísla.

Závěr: s rotací o úhel 0 nebo π je záměnná libovolná transformace roviny. To jest, množina všech řešení je $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Příklad (pokrač.)

- ④ Pro $\sin \alpha \neq 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a řešení $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Závěr: s rotací $\mathbf{R}_\alpha$ o úhel $\alpha \notin \{0, \pi\}$ jsou záměnné transformace roviny tvaru $\mathbf{X} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla. To jest, množina všech řešení je $\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Poznámky

- 1 Předchozí metoda (rozměrová zkouška pro hledanou matici $\mathbf{X}$ a následné řešení velké soustavy rovnic) je **universální** metodou pro řešení maticových rovnic, kde neznámá matice $\mathbf{X}$ vystupuje pouze v první mocnině.

Jak už to u universálních metod bývá: v některých případech je taková metoda zbytečně zdlouhavá.

- 2 Předvedeme **speciální** metodu řešení maticových rovnic tvaru^a
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

^aProtože rovnost $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, získáme tak i metodu pro řešení rovnic tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Musíme ovšem obezřetně zacházet s transpozicemi matic.

Převod maticové rovnice na více soustav lineárních rovnic

Maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$, a matice $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$, převedeme na p soustav

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

kde $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_p)$.

- 1 Každou takovou soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ vyřešíme předešlými postupy.^a
- 2 Řešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ existuje právě tehdy, když každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ má řešení.
- 3 Pokud má každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ řešení, pak „sesazením“ všech řešení $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ jednotlivých soustav dostaneme řešení původní maticové rovnice: $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_p)$.

^a Jak uvidíme, lze takový systém soustav řešit **simultánně**.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, máme řešit **dvě** soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obě soustavy mají stejnou matici soustavy, lze je tedy řešit simultánně:

1 Simultánní GEM:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Podle Frobeniovovy věty mají **obě** soustavy řešení.

Příklad (pokrač.)

- ② Zápis $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$ kóduje dvě soustavy s řešeními (v pořadí soustav zleva doprava):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

- ③ „Sesazení řešení dohromady“: obecné řešení je matice $\mathbf{X}$ ve tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3-7a & -7b \\ a & b \\ -1+5a & 1+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Příklad (pokrač.)

Závěr: množina všech řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je^a

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

^aPovšimněme si: jde o **rovinu** v lineárním prostoru $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Tato rovina prochází bodem $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a má směr $\left(\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$.

Poznámka

Víme, že pro **regulární** matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jediné řešení, a sice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Toto jediné řešení lze nalézt postupem, kterému se někdy říká **Gaussova-Jordanova eliminace**: eliminace řádkovými úpravami nekončí po dosažení horní trojúhelníkové matice, ale pokračuje nulováním i nad hlavní diagonálou.

Získáváme tak postup

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Speciálně: pro regulární $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ lze nalézt $\mathbf{A}^{-1}$ postupem

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Více viz cvičení a **skripta**, Příklad 6.4.12.

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Myšlenky postupu:

- 1 Zadané řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a

má „směr“ určený vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 2 Tudíž: hledanou soustavu očekáváme ve tvaru $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$, neboli $a_1x + a_2y + a_3z = b$.

Jak najít soustavu $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$ systematicky?

Příklad, pokrač.

Podle Frobeniovy věty je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

- 1 Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé; tvoří tudíž fundamentální systém soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde $\text{def}(\mathbf{A}) = 2$ a $\mathbf{A}$ má tři sloupce. To umožní nalézt $\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ a_3)$.
- 2 Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, neboli $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$. Matici $\mathbf{A}$ známe, můžeme dopočítat $\mathbf{b} = (b)$.

Příklad, pokrač.

③ Nalezení **A**:

① Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, musí platit

$$(2 \ 0 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

② Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$,

$$\text{musí platit } (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Tudíž $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ je fundamentální systém soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ neboli (např.) } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{A} = (2 \ -1 \ -1).$$

Příklad, pokrač.

- ④ Nalezení $\mathbf{b}$. Protože $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, je $b = -2$.
- ⑤ Závěr: hledaná soustava je (například) $(2 \ -1 \ -1 \mid -2)$.

Poznámky

- ① Předchozí příklad našel obecnou rovnici roviny z jejího parametrického zadání. Postup využíval platnosti Frobeniovy věty a základních vlastností matic.
- ② Očekáváme: podobný postup bude fungovat pro nalezení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad tělesem $\mathbb{F}$, která má řešení

$$\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

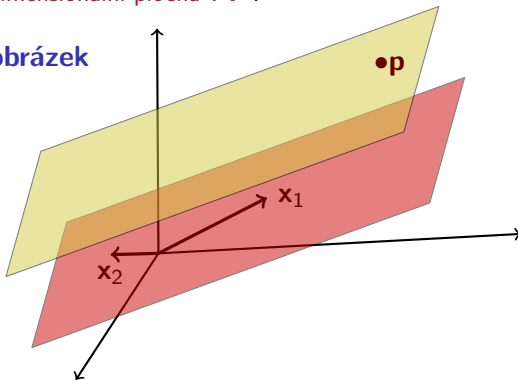
kde vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé.

Definice

Zápisu $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$, kde vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé, říkáme **afinní podprostor dimenze d v prostoru $\mathbb{F}^s$** .^a Seznamu $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ říkáme **směr** (také: **zaměření**) tohoto podprostoru.

^aTaké: **d -dimensionální plocha v $\mathbb{F}^s$** .

Ilustrační obrázek



Tvrzení

Ke každému d -dimensionálnímu afinnímu podprostoru $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ v $\mathbb{F}^s$ existuje alespoň jedna soustava tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ jako množinu řešení.

Důkaz.

Podrobně na přednášce; hlavní myšlenky jsou:

- 1 Musí platit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ pro $i = 1, \dots, d$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
- 2 Označme^a $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$. Protože seznam $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je lineárně nezávislý, platí $d = \text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{X}^T)$. Proto $\dim(\ker(\mathbf{X}^T)) = s - d$, označme jako $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-d})$ bázi $\ker(\mathbf{X}^T)$.
- 3 Našli jsme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-d})^T$ a dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.

^aPozor: matici $\mathbf{X}^T$ známe!

Příklad

Nad $\mathbb{R}$ nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

1 Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Platí

$$3 = \text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{X}^T).$$

- 2 Matice $\mathbf{A}$ má jako řádky fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Protože $\text{rank}(\mathbf{X}^T) = 3$, bude mít matice $\mathbf{A}$ dva lineárně nezávislé řádky.

Příklad (pokrač.)

- ③ Fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, neboli homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \text{ je například } \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik:^a proto je i $4 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

^aFundamentální systém tvoří bázi jádra matice soustavy. A **nenulové** skalární násobky prvků jakékoli báze opět tvoří bázi.

Příklad (pokrač.)

④ Dopočteme $\mathbf{b}$ z rovnice $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

$$\text{Tudíž } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Odpověď: 3-dimensionální afinní podprostor v $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

je řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$ nad $\mathbb{R}$.

Závěrečné poznámky

- 1 GEM je sice **universální metodou** řešení soustav lineárních rovnic, nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je však **numericky nestabilní**.

V praxi je pro řešení (zvláště velkých) soustav lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) nutno **použít jiné metody** (například iterační Gaussovu-Seidelovu metodu,^a a jiné). Tyto metody jsou mimo syllabus standardní přednášky z lineární algebry.

- 2 Jak řešit soustavy s parametrem? GEM je **universální metodou**! Při řešení soustav s parametrem pomocí GEM musíme být velmi opatrní na provádění elementárních úprav.

Pro soustavy se **čtvercovou** maticí vyvineme později další metodu řešení (kombinaci GEM a **Cramerovy věty**).

- 3 **Nepovinné**: Nad $\mathbb{R}$ lze mít i další geometrický pohled na GEM (tzv. **Householderovy reflexe**).

^aViz Poznámku 6.4.7 **skript**.

Determinant: část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.1 a 8.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 GEM.
- 2 Regularita a singularita čtvercových matic.

Dnešní přednáška

- 1 **Determinant** čtvercové matice: **test regularity matice**.
Determinant má ale především **geometrický význam**.
- 2 Bude nutné připomenout základní fakta o permutacích.
Použijeme grafickou notaci pro permutace: **strunové diagramy**.
- 3 Základní **metody výpočtu determinantu**: z definice a pomocí GEM.

Příští přednáška

- 1 Hlubší poznatky o determinantech.
- 2 Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic.

Definice (permutace)

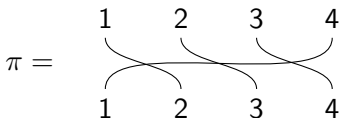
Permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je jakákoli bijekce $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Zápisy permutací

❶ Výčtem: $\pi : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 1$.

❷ Tabulkou:^a $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

❸ Strunovým diagramem:^b



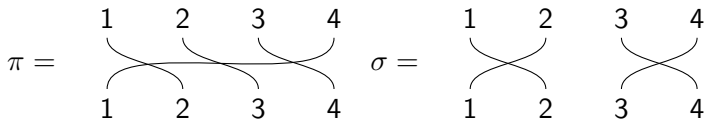
Strunový diagram čteme odshora dolů.

^aUpozornění: tato tabulka **není matice** ve smyslu našeho předmětu.

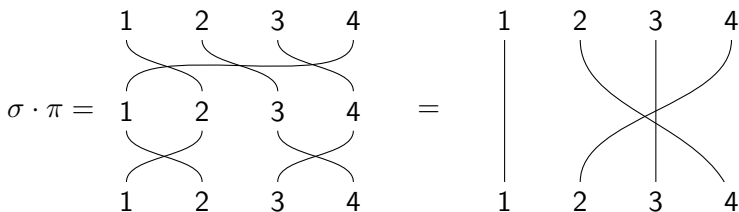
^bŘešené příklady na strunové diagramy naleznete v kapitole 8.1 **skript**.

Grafické skládání permutací

Například:



Spočteme **nejdříve** π a **potom** σ (směrem shora dolů):



Definice (symetrická grupa permutací)

Množině všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, spolu s výše uvedenou operací skládání $\cdot$, říkáme **symetrická grupa permutací n -prvkové množiny**. Značení: S_n .

Tvrzení (vlastnosti skládání permutací)

Skládání $\cdot$ v S_n je asociativní, má neutrální prvek (říkáme mu **jednotková** (také: **triviální**) **permutace**, značíme id_n), každá permutace má inverzi vzhledem ke skládání $\cdot$ (značení a terminologie: π^{-1} je **inversní permutace** k permutaci π).

Důkaz.

Plyne okamžitě z vlastností bijekcí. ■

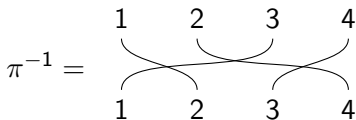
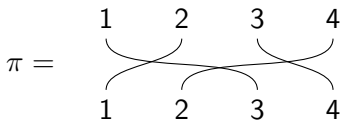
Definice (znaménko permutace)

Ať π je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$. **Znaménko permutace** π je číslo $\text{sign } \pi$, které je definováno takto:

$$\text{sign } \pi = \begin{cases} +1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje sudý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je sudá permutace),} \\ -1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje lichý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je lichá permutace).} \end{cases}$$

Příklad

Pro permutace



platí: $\text{sign } \pi = -1 = \text{sign}(\pi^{-1})$.

Tvrzení (znaménka speciálních permutací)

- ❶ Pro identickou permutaci id_n v S_n platí $\text{sign}(\text{id}_n) = 1$.
- ❷ Pro libovolné permutace σ a π v S_n platí $\text{sign}(\sigma \cdot \pi) = (\text{sign } \sigma) \cdot (\text{sign } \pi)$.
- ❸ Ať π je permutace v S_n . Pak platí $\text{sign } \pi = \text{sign}(\pi^{-1})$.
- ❹ Ať π je permutace v S_n . Označte jako σ permutaci v S_n vzniklou z π prohozením dvou hodnot. Potom $\text{sign } \sigma = -\text{sign } \pi$.

Důkaz.

Přednáška (strunové diagramy). ■

Definice (determinant čtvercové matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ definujeme **determinant** jako skalár

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Často se píše i $|\mathbf{A}|$ místo $\det(\mathbf{A})$.

„Šachový význam“ součinu $a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}$

- ❶ Ať π je permutace v S_n .

Pokud na políčka $a_{\pi(1),1}, a_{\pi(2),2}, \dots, a_{\pi(n),n}$ rozestavíme věže, pak se navzájem neohrožují.^a

- ❷ Obráceně: n navzájem se neohrožujících věží na „šachovnici“ $(a_{i,j})$ určuje permutaci π v S_n a tím i jeden součin

$$a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n}.$$

^aPřipomenutí: Položka $a_{\pi(j),j}$ matice $\mathbf{A}$ je položka v j -tém sloupci na $\pi(j)$ -tém řádku.

Příklad (Sarrusovo pravidlo pro matice 3×3)

Na množině $\{1, 2, 3\}$ existuje přesně šest následujících permutací:

$$\pi_0 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\pi_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\pi_4 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\pi_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\pi_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\pi_5 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

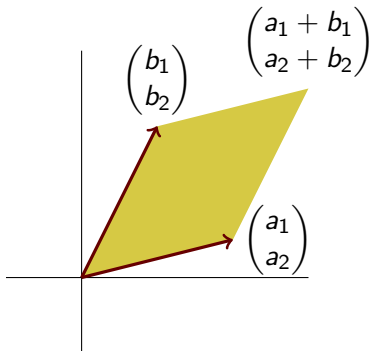
Tudíž:^a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

^aVzorec je často nazýván **Sarrusovo pravidlo**. Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861) byl francouzský matematik.

Geometrický význam determinantu matice 2×2 nad $\mathbb{R}$

Determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ je velikost $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy

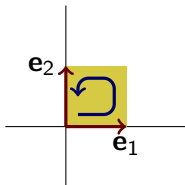


kde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Geometrie determinantu (pokrač.)

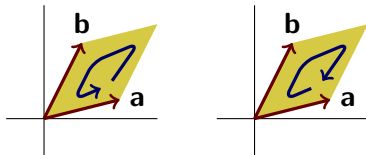
Vlastnosti velikosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy jsou:

- 1 $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$. Tato rovnost zavádí **jednotku** plochy a **orientaci** prostoru $\mathbb{R}^2$: při pohybu kolem počátku jsme zvolili směr proti směru hodinových ručiček — první je vektor $\mathbf{e}_1$, vektor $\mathbf{e}_2$ je druhý.



Geometrie determinantu (pokrač.)

- ② $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Tato rovnost vystihuje, jak chápeme **orientaci velikosti** plochy: změnou pořadí vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ změníme znaménko velikosti plochy.



$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Geometrie determinantu (pokrač.)

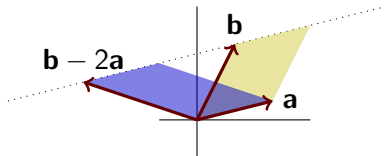
- ③ Výpočet hodnoty $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ je **lineární v každé poloze**, tj. pro libovolná reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ platí rovnosti

$$P(a_1 \cdot \mathbf{a}_1 + a_2 \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = a_1 \cdot P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + a_2 \cdot P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$$

$$P(\mathbf{a}, b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + b_2 \cdot \mathbf{b}_2) = b_1 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + b_2 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$$

Důležitý důsledek: platí rovnosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{a})$ a $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{b})$ pro a, b reálná.

Například:



$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$

Zobecnění (geometrický význam determinantu)

Determinant $\det(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ je velikost $V(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ orientovaného objemu rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{F}^n$. Rovnoběžnostěn je určen vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (v tomto pořadí).

Platí:

- 1 $V(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.
- 2 $V(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{sign } \pi \cdot V(\mathbf{a}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\pi(n)})$, kde π je libovolná permutace v S_n .
- 3 $V(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je lineární v každé souřadnici zvlášť.

Výše uvedené tři vlastnosti funkce

$$V : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{F}$$

určují pojem determinantu jednoznačně.

Tvrzení (determinant transponované matice)

Platí: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \text{sign}(\pi^{-1}) \cdot a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdot a_{2,\pi^{-1}(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)} \\ &= \det(\mathbf{A}^T)\end{aligned}$$

Využili jsme jednoduchého faktu: platí rovnosti

$$\{\pi \mid \pi \in S_n\} = S_n = \{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\}.$$



Důsledky (výpočet determinantu a GEM)

- 1 Prohození dvou řádků mění znaménko determinantu.
- 2 Vynásobení jednoho řádku nenulovým skalárem a změní determinant a -krát.
- 3 Přičtení lineární kombinace ostatních řádků k řádku nezmění hodnotu determinantu.

Tvrzení (determinant horní trojúhelníkové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková matice. Potom $\det(\mathbf{A}) =$ součin prvků na hlavní diagonále matice.

Důsledek (opatrný výpočet determinantu pomocí GEM)

$\det(\mathbf{A})$ lze počítat pomocí GEM: je nutné si ovšem poznamenat typy úprav (a tudíž i případné změny hodnoty determinantu).

Příklad (výpočet determinantu pomocí GEM)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -8 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ -2R_2 \\ R_3 \end{matrix} = \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 19 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{matrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -133 & -28 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -7R_3 \end{matrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -123 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 19R_2 \end{matrix} = \\
 &= \frac{2 \cdot 7 \cdot (-123)}{2 \cdot 7} = -123
 \end{aligned}$$

Věta (invertibilita matice pomocí determinantu)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí: $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Důsledek 8.4.4 skript).

Poznámky k výpočtu $\det(\mathbf{A})$

- 1 Výpočet z definice: časově náročný. Je zapotřebí se vyznat v S_n (má $n!$ prvků).
- 2 Výpočet pomocí GEM: méně náročný (řádově n^3 kroků). Pozor! Nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ je GEM **numericky nestabilní**. Navíc (při ručním výpočtu) je zapotřebí GEM provádět opatrně.
- 3 Jiný způsob výpočtu? Ano: rozvoj podle řádku nebo sloupce (rekursivní výpočet). **Příště.**

Jiný způsob zavedení determinantu (nepovinné)

Determinant lze zavést pomocí **vnější mocniny**^a lineárního prostoru, viz kapitolu 5 **skript**.

Výhody tohoto přístupu:

- 1 Okamžitý geometrický vhled do pojmu determinant a snadné důkazy vlastností determinantu.
- 2 Determinant je možno počítat pro libovolná lineární zobrazení, ne jen pro matice.
- 3 Pojem vnější mocniny vede rychle ke **geometrické algebře**, která umožňuje elegantní a rychlé výpočty v počítačové grafice, viz například knihu

L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann, *Geometric algebra for Computer Science*, Elsevier, 2007

^aNa první pohled myšlenka vnější mocniny vypadá velmi divoce. Tato myšlenka je ale velmi přirozená a je stejně stará jako lineární algebra: v roce 1844 s ní přišel **Hermann Grassmann** (1808–1887).

Determinant: část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.3 a 8.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Definice determinantu čtvercové matice (s použitím permutací).
- 2 Základní metody výpočtu determinantu:
 - 1 Z definice: nutnost znalosti S_n .
 - 2 Pomocí GEM: nutnost opatrného provádění GEM.
- 3 Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dnešní přednáška

- 1 Věta o rozvoji determinantu podle sloupce.^a
- 2 Hlubší poznatky o determinantu.
- 3 Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic (Cramerova věta). Ukážeme geometrický význam Cramerovy věty.

^aVíme: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$. Takže determinant půjde rozvíjet i podle řádku.

Připomenutí

Determinant $\det(\mathbf{A})$ čtvercové matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ je **lineární v každém sloupci**. Speciálně: protože $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \mathbf{e}_i$ (kde $\mathbf{a}_j$ je j -tý sloupec matice $\mathbf{A}$), platí rovnost:^a

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}_{\text{Značení: } A_{ij}}.$$

Například (zvolili jsme $j = 2$, tj. rozvíjíme podle druhého sloupce):

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 7 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{12}} + 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{22}} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}}_{A_{32}}$$

^aTéto rovnosti se říká (Laplaceův) **rozvoj determinantu podle j -tého sloupce**.

Definice

Determinantu $A_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ říkáme **algebraický doplněk posice (i, j)** v matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Věta (praktický výpočet algebraického doplňku)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Označme jako $\mathbf{A}_{ij}$ matici typu $(n-1) \times (n-1)$ **vzniklou** z matice $\mathbf{A}$ **vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce**. Potom^a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

^a**Pozor:** nezapomeňte na **znaménko posice (i, j)** : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbf{A}_{ij})$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Lemma 8.3.4 ve **skriptech**). ■

Pozorování

Rozvoj determinantu podle sloupce umožňuje **rekursivní výpočet** determinantu! Důvod: pro $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ jsou algebraické doplňky jednotlivých posic determinanty matic typu $(n-1) \times (n-1)$.

Příklad (determinant rozvojem podle třetího sloupce)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{13}} \\ + \underbrace{6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{23}} \\ + \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{33}} \\ + \underbrace{5 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{43}}$$

Příklad (přijde vhod u Cramerova pravidla)

Pro $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \mathbf{e}_k$ označme $\mathbf{X}_j = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Spočteme $\det(\mathbf{X}_j)$ rozvojem podle j -tého sloupce:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{X}_j) &= \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \\&= \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \\&= \sum_{k=1}^n x_k \cdot \underbrace{\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n)}_{=0 \text{ pro } k \neq j \text{ a } =1 \text{ pro } k = j} \\&= x_j\end{aligned}$$

Poznámky k výpočtu determinantu rozvojem podle sloupce

- 1 Protože $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$, lze determinant počítat i rozvojem podle **řádku**.
- 2 Rekursivní výpočet determinantu (tj. výpočet rozvojem podle sloupce nebo řádku) má složitost $n!$ — je tudíž obecně **výpočetně pomalý**.
- 3 Výpočet determinantu rozvojem je **vhodný pro řídké matice** (matice, obsahující hodně nul).

Věta (základní strukturální vlastnosti determinantu)

Funkce $\det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{F}$ má následující vlastnosti:

- 1 $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.
- 2 $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{A})$.
- 3 Pro regulární $\mathbf{A}$ je $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
- 4 $\det(a \cdot \mathbf{A}) = a^n \cdot \det(\mathbf{A})$, kde a je libovolný skalár.^a

^aPozor: rovnost $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$ **obecně neplatí**.

Důkaz.

- 1 Víme z minulé přednášky.
- 2 Bez důkazu (viz např. Tvrzení 8.2.19 ve **skriptech**).
- 3 Pro regulární $\mathbf{A}$ platí rovnosti
 $1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1})$.
Takže $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$.
- 4 Plyne z toho, že determinant je v každém sloupci lineární.

Definice (adjungovaná matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ je její **adjungovaná matice** $\text{adj}(\mathbf{A})$ transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$.

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

$$\text{Pro } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ je } \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta (Cramerova^a věta o adjungované matici)

^aGabriel Cramer (1704–1752) byl švýcarský matematik.

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 2$. Potom platí rovnosti:

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \text{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$$

Pro regulární $\mathbf{A}$ tedy platí $\mathbf{A}^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$.

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz např. ve **skriptech**, Věta 8.4.3.

Příklad (inverse pomocí adjungované matice)

Pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je $\det(\mathbf{A}) = 6$. Víme, že **inverse** matice $\mathbf{A}$ **existuje**.

- ① Matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$ je $\begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Proto } \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -10 & 26 & -12 \\ 4 & -11 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ② Celkově $\mathbf{A}^{-1} = 6^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 26 & -11 & -1 \\ -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Doporučení (sanity check)

Při výpočtu $\text{adj}(\mathbf{A})$ je možná rozumné **nejprve** spočítat matici algebraických doplňků a **potom** ji transponovat.

Výhodnost a vhodnost výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\text{adj}(\mathbf{A})$

- 1 Pro obecné (velké) matice je výpočet **nevýhodný**. Vyžaduje spočítat velké množství determinantů.
- 2 Pro **velké a řídké matice** (tj. pro matice obsahující velké množství nulových položek) **může** jít o **výhodný** výpočet.
- 3 Výpočet je **výhodný** pro matice typu 2×2 .

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je regulární (tj., ať $\det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$).

Potom

$$\mathbf{A}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = (ad - bc)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- 4 **Poznámka**: některé aplikace (například v kryptografii) vyžadují práci s maticemi nad ještě **obecnější** strukturou než je těleso. Pak je výpočet $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí $\text{adj}(\mathbf{A})$ často jediná možnost.

Definice (soustava se čtvercovou maticí)

Rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, říkáme **soustava se čtvercovou maticí**.

Tvrzení (řešení čtvercové soustavy s regulární maticí)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou maticí. Tato soustava má **jediné řešení** právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je **regulární matice**. V tomto případě je toto jediné řešení tvaru $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Důkaz.

Regularita matice $\mathbf{A}$ znamená přesně to, že $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ je isomorfismus. To znamená přesně to, že pro každé $\mathbf{b}$ existuje právě jedno $\mathbf{x}$ takové, že $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}$. Evidentně platí $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$. ■

Cramerova věta o řešitelnosti regulárních soustav lineárních rovnic (také: Cramerovo pravidlo)

Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou **regulární** maticí nad $\mathbb{F}$.

Potom j -tá položka jediného řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ je tvaru

$$x_j = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

Důkaz.

Označme $\mathbf{X}_j = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$. Tudíž

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_j = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$, a proto

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{X}_j) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

To znamená

$$\det(\mathbf{X}_j) = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Ale $\det(\mathbf{X}_j) = x_j$ (např. rozvojem podle j -tého sloupce, viz str. 6 tohoto tématu). 

Uvedený důkaz je pravděpodobně ten nejelementárnější možný. Pochází z článku Stephen M. Robinson, [A short proof of Cramer's rule](#), *Mathematics Magazine* 43.2 (1970), 94–95.

Příklad (použití Cramerova pravidla)

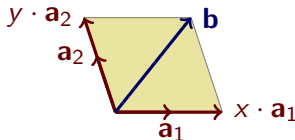
Pro soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{array} \right)$ nad $\mathbb{R}$ platí $\left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{array} \right| = 22 \neq 0$. Lze tedy použít Cramerovo pravidlo.
Jediné řešení má tvar

$$\frac{1}{\left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{array} \right|} \cdot \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 6 \end{array} \right| \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{-19}{22} \\ \frac{15}{22} \end{array} \right)$$

Geometrie Cramerovy věty pro soustavu 2×2 nad $\mathbb{R}$

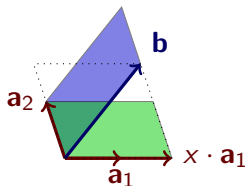
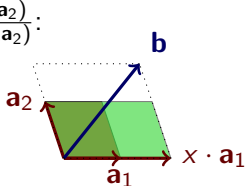
Pro **regulární** soustavu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{b})$ platí podle Cramerovy věty

$$\frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_1 + \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}. \text{ Co to opravdu znamená?}^a$$



Ale $x \cdot \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(x \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)$, takže platí

$$x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}:$$



Podobnou úvahu lze provést pro $y = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}$.

^aAnalogicky lze postupovat pro regulární soustavy větších rozměrů a nad libovolným tělesem (musíme ovšem kreslit rovnoběžnostěny).

Příklad (vyřešte nad $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ je parametr)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -p & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & p & -1 \end{array} \right), \det(\mathbf{A}) = (p-2) \cdot (p-17).$$

❶ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ právě tehdy, když $p \notin \{2, 17\}$.

V tomto případě existuje jediné řešení. Toto jediné řešení lze nalézt pomocí Cramerovy věty:

$$\frac{1}{(p-2) \cdot (p-17)} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -p & -1 \\ 0 & -7 & -5 \\ -1 & 3 & p \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -p & 3 \\ 1 & -7 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{26}{17-p} \\ \frac{3}{17-p} \\ \frac{1}{17-p} \end{pmatrix}, p \notin \{2, 17\}.$$

Příklad (pokrač.)

② $p = 2$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right)$.

Řešení: $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, pro $p = 2$.

③ $p = 17$. Řešíme soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -17 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 17 & -1 \end{array} \right)$.

Řešení pro $p = 17$ neexistuje (Frobeniova věta).

Doporučení

Pro čtvercové soustavy s parametrem doporučujeme použít kombinaci Cramerovy věty a GEM. Výpočet pak má dvě fáze:

- ① Cramerova věta pro ty parametry, pro které je matice soustavy regulární.
- ② GEM pro ty parametry, pro které je matice soustavy singulární.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Matice lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimenzí.
- 2 Matice transformace souřadnic.

Dnešní přednáška

- 1 Budeme studovat obecná lineární zobrazení $f : L \rightarrow L$, kde L má konečnou dimenzi.
Zjistíme, pro které vektory $\vec{x}$ platí $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ (tzv **homotetie** — to je to nejjednodušší lineární zobrazení z L do L).
- 2 Budeme se snažit změnit bázi L tak, aby ve směrech vektorů nové báze bylo zobrazení $f : L \rightarrow L$ homotetií (obecně pro každý směr různou). Ne vždy to půjde.

Příští přednáška

- 1 Diagonalisace matic nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.
- 2 Dvě aplikace diagonalisace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.^a

^aTyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Příklad (equilibrium stochastických procesů)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezněte alespoň jeden **nenulový** vektor $\mathbf{q}$ tak, aby platila rovnost^a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$.

To je snadné: $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože **řádkové součty** matice $\mathbf{A}$ jsou 1. Tudíž $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

^aStejnou (ale komplikovaněji zadanou) úlohu řeší algoritmus PageRank, viz například K. Bryan a A. Lease, **The \$ 25,000,000,000 eigenvector: The linear algebra behind Google**, *SIAM Rev.* 48.3 (2006), 569–581, nebo Dodatek F skript.

Co dělat pro obecnou matici $\mathbf{A}$?

Měli jsme štěstí („hezký“ tvar matice $\mathbf{A}$, takovým maticím se říká **řádkově stochastické**). Jak ale postupovat pro **obecnou** matici $\mathbf{A}$?

Příklad (equilibrium stochastických procesů, znovu a jinak)

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ nalezneme všechna **nenulová** řešení **všech soustav** tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je **neznámé**.

Přepsáním soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ na $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ zjistíme, co je třeba udělat:

- 1 Matice $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2$ musí být singulární. Jedině tehdy bude mít rovnice $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ nenulové řešení.

To jest: hledáme všechna λ taková, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

To znamená vyřešit rovnici $\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = 0$.

- 2 Pro konkrétní hodnoty λ nalezneme nenulové řešení soustavy $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ pomocí GEM.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

$$\det(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 0.3 - x & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 - x \end{vmatrix} = (0.3 - x) \cdot (0.2 - x) - 0.56 = \\ = x^2 - 0.5x - 0.5 = (x - 1) \cdot (x + 0.5) = 0.$$

Soustava $(\mathbf{A} - x \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro

❶ $x = 1$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & -0.8 & 0 \end{array} \right)$ a řešení^a $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

To znamená: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

❷ $x = -0.5$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0 \end{array} \right)$ a řešení^b $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

To znamená: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -0.5 \cdot \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x}$ ze $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

^aTo jsme již věděli.

^bTo je nová informace.

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

Co jsme se vlastně dozvěděli a k čemu je to dobré?

- ❶ V souřadnicovém systému $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ se matice $\mathbf{A}$ stane **diagonální maticí** $D(1; -0.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Opravdu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1; -0.5)} = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

tudíž

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}}_{D(1; -0.5)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}}$$

Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)

- ② Díky předchozímu vidíme, že zadáme-li **rekurentní proces**

$$\mathbf{x}_0 \text{ libovolný vektor z } \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

pak se **posloupnost** vektorů $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ chová následovně:

- ① Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, \dots$

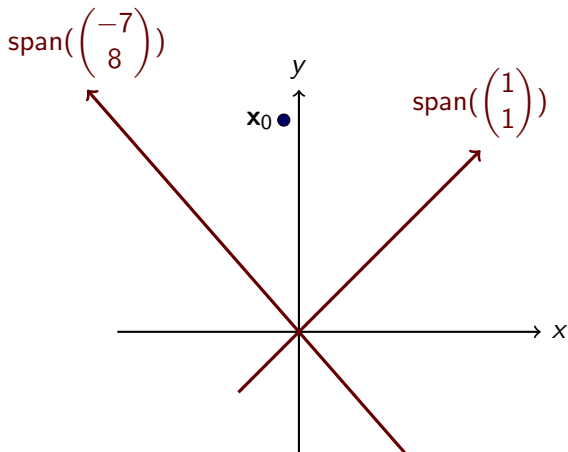
- ② Je-li $\mathbf{x}_0$ na přímce $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$, jde o posloupnost $\mathbf{x}_0, -0.5 \cdot \mathbf{x}_0, (-0.5)^2 \cdot \mathbf{x}_0, (-0.5)^3 \cdot \mathbf{x}_0, \dots$

- ③ Je-li $\mathbf{x}_0 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, tedy jestliže platí rovnost

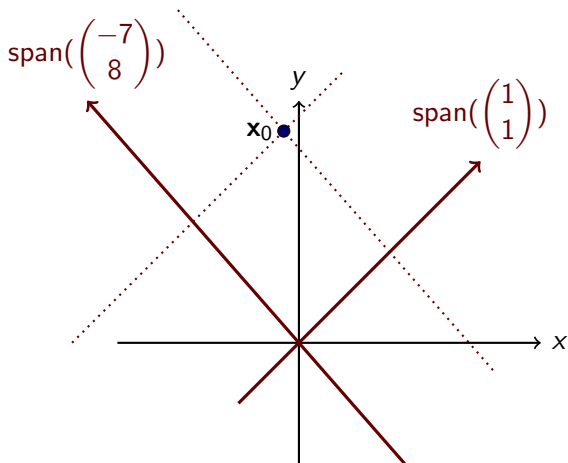
$$\text{coord}_B(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ potom } \text{coord}_B(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} a \\ (-0.5)^n \cdot b \end{pmatrix}.$$

Diagonalisací matice $\mathbf{A}$ tedy získáváme o rekurentním procesu **úplný přehled**.

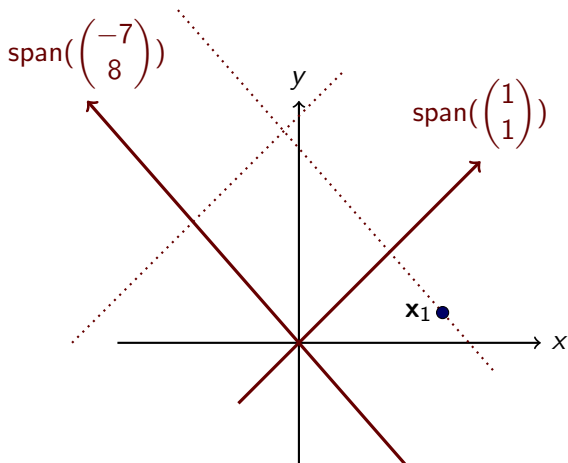
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



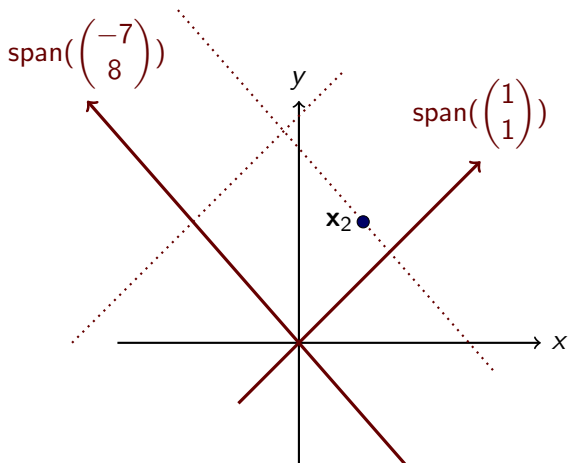
Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Příklad (equilibrium stochastických procesů, pokrač.)



Shrnutí dosavadních úvah

- 1 Pokud pro obecnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ najdeme bázi B , ve které $\mathbf{A}$ je diagonální maticí, získáme v nové bázi úplný přehled o maticích tvaru $\mathbf{A}^k$, kde $k \geq 0$.

To je důležité například v následujících oblastech:

- 1 Teorie dynamických systémů.
- 2 Ekonomie (například tzv. Leontiefův input-output model).
- 3 Složitost rekursivních algoritmů (řešení rekurentních rovnic, viz příští přednášku).
- 4 Geometrie kvadratických útvarů, viz kapitolu 14.1 skript.
- 5 Funkce matic, viz příští přednášku.
- 6 Atd.

Hledání diagonální matice k matici $\mathbf{A}$ se říká diagonalisace matice $\mathbf{A}$. Ne vždy zadanou matici diagonalisovat půjde.

- 2 Problém diagonalisace lze zformulovat (a řešit) pro obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$, kde L má konečnou dimenzi.

Definice

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ je $\lambda \in \mathbb{F}$ **vlastní hodnotou** (také: **vlastním číslem**), pokud existuje nenulový vektor $\vec{x}$, splňující rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

Každému takovému nenulovému vektoru $\vec{x}$ říkáme **vlastní vektor** **příslušný hodnotě** λ .

Pozorování

Ať $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ je lineární zobrazení.

- 1 Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{F}$ platí: $\{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}\} = \ker(\mathbf{f} - \lambda \cdot \text{id})$.
Tudíž vlastní vektory příslušné hodnotě λ tvoří podprostor L .^a
- 2 λ je vlastní hodnota $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$ je netriviální prostor.

^aŘíkáme mu **vlastní podprostor** příslušný λ , značíme jej $\text{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$. Důvod: vlastní hodnotě se říká **eigenvalue**, vlastnímu vektoru **eigenvector**, vlastnímu podprostoru **eigenspace**. Německy: eigen=vlastní.

Připomenutí (základní vlastnosti podobnosti matic)

Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si **podobné** (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Podobné matice jsou maticemi **stejného** lineárního zobrazení, ale vzhledem k **jiné** bázi.

Platí:

- 1 $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$.
- 2 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\mathbf{B} \approx \mathbf{A}$.
- 3 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \approx \mathbf{C}$, potom $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$.

Definice (charakteristický polynom čtvercové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Výrazu $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)$ říkáme **charakteristický polynom** matice $\mathbf{A}$ (značení: $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$).

Poznámky (pro matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$)

- 1 $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je polynom stupně n . Tudíž má v $\mathbb{F}$ nanejvýš n kořenů (i s násobnostmi). Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ nemá polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ v $\mathbb{R}$ žádný kořen.
- 2 Jestliže $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, potom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x)$.^a
Důvod:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - x\mathbf{E}_n) &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - x\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}x\mathbf{T}) = \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n)\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n) \det(\mathbf{T}) = \\ &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_n). \end{aligned}$$

^aPozor: obrácená implikace neplatí, viz dále.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ je lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. Označme jako $\mathbf{A}_f$ matici $\mathbf{f}$ vzhledem k jakékoli bázi prostoru L . Potom $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}_f - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$.

Důkaz.

Protože L má dimenzi n , je λ vlastní hodnotou $\mathbf{f}$ právě tehdy, když $\dim(\ker(\mathbf{f} - \lambda \text{id})) > 0$. To nastane právě tehdy, když matice $\mathbf{A}_f - \lambda \mathbf{E}_n$ je singulární. ■

Poznámka

Předchozí tvrzení nezávisí na volbě báze prostoru L a tím pádem nezávisí na volbě matice $\mathbf{A}_f$.

Připomenutí: změnou báze změníme matici $\mathbf{A}_f$ na matici $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Příklad (matice mohou mít stejné vlastní hodnoty, ale různé vlastní podprostory)

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad $\mathbb{R}$.

Potom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

- ❶ Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:

$$\text{eigen}(3, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- ❷ Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:

$$\text{eigen}(2, \mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Příklad (pokrač.)

Pozor! Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ je $\text{char}_{\mathbf{B}}(x) = \text{char}_{\mathbf{A}}(x)$. Ale

$$\text{eigen}(3, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ a } \text{eigen}(2, \mathbf{B}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Tedy: $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají **stejná vlastní čísla** (i s násobnostmi), ale **různé vlastní podprostory**.

Problém diagonalisace

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ chceme rozhodnout, zda $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$,
kde $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ je **diagonální matice**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

nebo ve sloupcovém zápisu

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2, \lambda_3 \cdot \mathbf{e}_3, \dots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n)$$

Myšlenka nalezení matic $\mathbf{T}$ a $\mathbf{D}$ v rovnici $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$

At' $\mathbf{D} = D(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$.

- ① Rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ platí právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ a matice $\mathbf{T}$ je regulární.
- ② Pro regulární matici $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ právě tehdy, když platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \dots, n$.

Shrnuto: rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot D(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{T}^{-1}$ platí právě tehdy, když platí následující dvě podmínky:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{t}_j$ pro všechna $j = 1, \dots, n$.
To jest: j -tý sloupec $\mathbf{t}_j$ matice $\mathbf{T}$ je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_j matice $\mathbf{A}$.
- Matice $\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n)$ je regulární.

Pozorování

Dva vlastní vektory, příslušející dvěma **různým** vlastním hodnotám, jsou lineárně nezávislé.

Platí-li

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_1} = \lambda_{j_1} \cdot \mathbf{t}_{j_1} \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{t}_{j_2}$$

pak z rovnosti $a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2} = \mathbf{0}$ plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{0} \\ &= (\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot (a_1 \cdot \mathbf{t}_{j_1} + a_2 \cdot \mathbf{t}_{j_2}) \\ &= a_1 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_1}}_{\neq \mathbf{0}} + a_2 \cdot \underbrace{(\mathbf{A} - \lambda_{j_2} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{j_2}}_{=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

tedy $a_1 = 0$.

Rovnost $a_2 = 0$ se dokáže analogicky.

Problém

Existuje dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů pro **stejnou** vlastní hodnotu?

Věta (charakterisace diagonalisovatelných matic nad $\mathbb{F}$)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 $\mathbf{A}$ je diagonalisovatelná, tj $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
- 2 Charakteristický polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze v $\mathbb{F}$ rozložit na součin lineárních faktorů a platí: násobnost λ jako kořene $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.^a

^aNásobnosti λ jako kořene $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ se někdy říká **algebraická násobnost** λ , číslu $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$ se někdy říká **geometrická násobnost** λ .

Důkaz.

Bez důkazu (nemáme vybudovanou teorii polynomů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$). Pro zájemce: Věta 10.4.8 **skript**. ■

Příklad (nad $\mathbb{R}$)

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ splňují:

- ❶ $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.
- ❷ Protože $\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{A})) = 2$ a $\dim(\text{eigen}(2, \mathbf{A})) = 1$, platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{D}$ pro nějakou diagonální matici $\mathbf{D}$.
- ❸ Protože $\dim(\text{eigen}(3, \mathbf{B})) = 1$ a $\dim(\text{eigen}(2, \mathbf{B})) = 1$, neplatí $\mathbf{B} \approx \mathbf{D}$ pro žádnou diagonální matici $\mathbf{D}$.

Ukázali jsme (mimo jiné): $\mathbf{A} \not\approx \mathbf{B}$, přestože $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x)$.

Příklad

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ platí $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$

a $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, kde $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{A}$ v kanonické bázi odpovídá lineárnímu zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y + 2z \\ -x + 4y - z \\ -4x + 4y - z \end{pmatrix}$$

Vzhledem k bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ jde o podstatně jednodušší zobrazení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Diagonalisace matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Pojmy vlastní hodnota a vlastní vektor lineárního zobrazení.
- 2 Věta o diagonalisovatelnosti čtvercových matic nad $\mathbb{C}$.

Dnešní přednáška

- 1 Diagonalisovatelnost matic nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.
- 2 Dvě aplikace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.^a

^aTyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Připomenutí důležité vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$

Každý polynom $p(x)$ v $\mathbb{C}[x]$ stupně n má **přesně** n kořenů (počítaných i s násobnostmi).^a

^aTéto vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$ se říká **algebraická uzavřenost**.

- 1 Komplexní číslo λ je kořen polynomu $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ **násobnosti** k , pokud platí rovnost $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$ pro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $q(\lambda) \neq 0$.
- 2 **Speciálně**: číslo λ má jako kořen $p(x)$ **násobnost nula** právě tehdy, když λ **není kořenem** polynomu $p(x)$.

Důsledek (téma 08A, tvar věty o diagonalisaci pro $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

Pro čtvercovou matici **A** nad $\mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 Matice **A** diagonalisovatelná.
- 2 Pro každé komplexní číslo λ platí: násobnost λ jako kořene polynomu $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\text{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.

Příklad

Pauliho matice^a jsou následující tři matice nad $\mathbb{C}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všechny tyto matice jsou diagonalisovatelné:

- 1 Matice Z již diagonální je.

^aJde o důležitý příklad v kvantové mechanice a kvantovém počítání. Matice X , Y a Z jsou operátory spinu ve směrech os x , y , z a značívají se též σ_x (také: σ_1) σ_y (také: σ_2) σ_z (také: σ_3)

Užitečná početní cvičení: platí rovnosti

- 1 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \mathbf{E}_2$.
- 2 $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{E}_2$, kde $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j$ je tzv Poissonova závorka a δ_{jk} je Kroneckerův symbol.
- 3 $[\sigma_j, \sigma_k] = \sum_{l=1}^3 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$, kde $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j$ je tzv komutátor a ϵ_{jkl} je Levi-Civitův symbol.

Příklad (pokrač.)

② Diagonalisace matice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Platí $\text{char}_X(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice X jsou: $\lambda_1 = 1$,
 $\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor X je diagonální v bázi $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$.

Příklad (pokrač.)

3 Diagonalisace matice $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Platí $\text{char}_Y(x) = x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice Y jsou: $\lambda_1 = 1$,
 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tudíž

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a operátor Y je diagonální v bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Jordanův tvar čtvercové matice

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ taková, že polynom $\text{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze rozložit na součin lineárních faktorů.^a

Potom lze dokázat, že $\mathbf{A}$ je „téměř diagonalisovatelná“. Přesněji: platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_p \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p$ jsou tzv. Jordanovy segmenty rozměrů $m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, \dots, m_p \times m_p$, kde $m_1 + \dots + m_p = n$.

O Jordanově tvaru budeme mluvit na příští přednášce (téma 09A).

^aTo platí například pro libovolnou matici nad $\mathbb{C}$.

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ je regulární matice nad $\mathbb{R}$. Potom platí:

- ① $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = (a - x)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.
Diskriminant tohoto výrazu je $-4b^2$.

Matice $\mathbf{A}$ je tedy nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná **pouze** v případě $b = 0$.

V tomto případě ale $\mathbf{A}$ už je diagonální: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a musí platit $a \neq 0$, protože $\mathbf{A}$ je regulární.

Matice $\mathbf{A}$ je tedy maticí změny měřítka (změna je stejná na obou souřadnicových osách).

Příklad (pokrač.)

- ② V případě $b \neq 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ není nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná.

Matice $\mathbf{A}$ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) má vlastní hodnoty $\lambda_1 = a + bi$ a $\lambda_2 = a - bi$, protože $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$.

Označme $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále označme jako α úhel^a mezi vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Potom

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

To jest: $\mathbf{A}$ je rotace o úhel α , následovaná změnou měřítka.

^aÚhlu α se říká **argument** komplexního čísla $a + bi$. Platí tedy rovnost $a + bi = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$.

Tvrzení (klasifikace regulárních transformací roviny)

Ať $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je regulární a ať nemá 2-násobnou vlastní hodnotu. Pak $\mathbf{M}$ je podobná buď

❶ matici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \neq b$ jsou z $\mathbb{R}$ a $a \cdot b \neq 0$,

nebo

❷ matici $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, kde $r > 0$ a $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Slogan

Regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou **pouze** dvou typů:

- ❶ Změny měřítka (změna měřítka je na každé souřadnicové ose **jiná**).
- ❷ Rotace následované změnou měřítka **stejnou** na obou souřadnicových osách.

Důkaz (klasifikace regulárních transformací roviny).

- 1 V případě, kdy $\mathbf{M}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$, má $\mathbf{M}$ **dvě různé** reálné vlastní hodnoty a, b . Tudíž $\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \cdot b \neq 0$, protože $\mathbf{M}$ je regulární.
- 2 V případě, kdy $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná není, má $\text{char}_{\mathbf{M}}(x)$ **komplexní** kořen $\lambda = a + bi$, kde $b \neq 0$.
Označme jako $\mathbf{v}$ **komplexní** vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ . Označme jako $\mathbf{T}$ matici se sloupci $\mathbf{t}_1 = \text{Re}(\mathbf{v})$ (vektor reálných částí položek vektoru $\mathbf{v}$) a $\mathbf{t}_2 = \text{Im}(\mathbf{v})$ (vektor imaginárních částí položek vektoru $\mathbf{v}$).
Potom platí rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$.
Nyní stačí použít předchozí příklad. ■

Výpočet mocnin diagonalisovatelné matice

Pro diagonalisovatelnou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1} \text{ pro nějakou regulární matici } \mathbf{T}.$$

$$\text{Tudíž: } \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}^{-1}.$$

$$\text{Obecně: } \mathbf{A}^k = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{T}^{-1}, \text{ pro všechna přirozená čísla } k \geq 0.$$

Protože mocniny diagonální matice lze počítat velmi rychle, lze rychle počítat i mocniny diagonalisovatelných matic.

Ukážeme dvě aplikace umocňování:

- 1 Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic.
To je důležité při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
- 2 Základní myšlenku funkcí matice.
To je důležité ve fyzice, grafice, kvantovém počítání, ...

Příklad (Fibonacciho posloupnost)

Hledáme posloupnost čísel $F(n)$, splňující **lineární rekurentní rovnici** $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, pro všechna př. č. $n \geq 0$.

Cíl: chceme **explicitní vzorec** pro $F(n)$, $n \geq 0$.

Evidentně: známe-li $F(0)$ a $F(1)$, známe všechna $F(n)$.^a

- ① Vytvoříme **generující matici** $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pro kterou platí:

$$\mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}, \text{ obecně } \mathbf{F}^n \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$

- ② Matice $\mathbf{F}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

^aPožadavkům $F(0) = x_0$ a $F(1) = x_1$ se říká **počáteční podmínka**. Pro klasickou Fibonacciho posloupnost jde o $F(0) = 1$, $F(1) = 1$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost, pokrač.)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix} &= \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Takže: } F(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(0) + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(1)$$

V klasickém případě (tj když $F(0) = F(1) = 1$), je

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Poznámky (lineární homogenní rekurence k -tého řádu)

Obdobným způsobem lze řešit jakoukoli **homogenní lineární rekurentní rovnici k -tého řádu**: hledáme posloupnost $X(n)$ prvků $\mathbb{F}$, které splňují

$$X(n+k) = a_1X(n+k-1) + a_2X(n+k-2) + \dots + a_kX(n)$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 0$, kde $a_1, \dots, a_k$ jsou v $\mathbb{F}$.

Jediné, co potřebujeme, je diagonalisovatelnost generující matice.

- 1 Řešení rekurentních rovnic hraje zásadní úlohu při **analýze složitosti rekursivních algoritmů**.
- 2 Podobné postupy fungují i pro **lineární homogenní diferenciální rovnice k -tého řádu**. Viz Dodatek O **skript**.

Příklad (exponenciála matice)

Víme, že funkce e^x má Taylorův rozvoj $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pro čtvercovou diagonalisovatelnou matici $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ definujeme

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}}{n!} = \mathbf{T} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \right)}_{=e^{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Konvergenci této řady musíme chápat ve smyslu normy.^a

Lze ukázat, že matice $\exp(\mathbf{D})$ je diagonální, a že platí $\exp(\mathbf{D}) = (\delta_{ij} \cdot e^{d_{ij}})$.

^aTo je velmi technický pojem, nebudeme o něm mluvit. Více například v knize Roger A. Horn, Charles J. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, nebo v přednášce [A0B01PAN](#) (Pokročilá analýza), nebo v kapitole 13.2 [skript](#). Analogicky exponenciála lze postupovat pro obecnou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (případně $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), která má Taylorův rozvoj.

Jordanův tvar

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 11.1 a 11.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí lze (za určitých předpokladů) diagonalisovat.
- 2 Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí diagonalisovat nelze.

Dnešní přednáška

- 1 Budeme studovat obecná lineární zobrazení $f : L \rightarrow L$, kde L má konečnou dimenzi.
Vysvětlíme, co je Jordanův tvar zobrazení f .^a
Půjde o tvar: $f = \text{diagonální} + \text{nilpotentní}$.
Nilpotentní = „téměř nulové zobrazení“.
To znamená: Jordanův tvar = „téměř diagonální tvar“.

^a Jde o velmi technickou partii lineární algebry. Některé důkazy tudíž neuvedeme. Důkazy všech tvrzení naleznete v Kapitole 11 skript.

Zkouška: výpočet Jordanova tvaru *nebude* v písemné části (mohou tam ale být nilpotentní matice), u ústní části mohou být vyžadovány pouze hlavní myšlenky Jordanova tvaru (viz str 8 a 9 tohoto tématu).

Motivační příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ jsou nad $\mathbb{R}$. Potom:

- ① $\text{char}_{\mathbf{A}}(x) = \text{char}_{\mathbf{B}}(x) = (x - 4)^2 \cdot (x - 9)$, kořeny $\lambda_{1,2} = 4$ násobnosti 2 a $\lambda_3 = 9$ násobnosti 1.
- ② $\text{eigen}(4; \mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\text{eigen}(9; \mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{e}_3)$.
- ③ $\text{eigen}(4; \mathbf{B}) = \text{span}(\mathbf{e}_1)$, $\text{eigen}(9; \mathbf{B}) = \text{span}(\mathbf{e}_3)$.

Závěry:

- ① **A je diagonalisovatelná** a $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na
 $\text{eigen}(4; \mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\text{eigen}(9; \mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{e}_3)$
- ② **B není diagonalisovatelná** a $\mathbb{R}^3$ se „nerozkládá“ na
 $\text{eigen}(4; \mathbf{B}) = \text{span}(\mathbf{e}_1)$ a $\text{eigen}(9; \mathbf{B}) = \text{span}(\mathbf{e}_3)$

Důvod: je **málo vlastních vektorů** pro $\lambda_{1,2} = 4$.

Motivační příklad (pokrač.)

Matice **B** se „příliš neliší“ od diagonalisovatelné matice, protože

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}} \quad \text{a} \quad \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tzn. „chyba **N** je malá řádu 2“.

Dá se $\text{eigen}(4; \mathbf{B})$ „zvětšit“ na prostor dimenze 2?

Jak zobecnit pojem vlastního vektoru, aby vlastní podprostor $\text{eigen}(4; \mathbf{B}) = \ker(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)$ zvětšil dimenzi?

Zobecnění vlastního vektoru pro $\lambda_{1,2} = 4$ a matici $\mathbf{B}$

Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ se evidentně v rovině $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ děje něco,
co souvisí s číslem 4:

- 1 $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{o}$, protože $\mathbf{e}_1$ je vlastní vektor $\mathbf{B}$, příslušný vlastní hodnotě 4.
- 2 $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{o}$, protože $\mathbf{e}_2$ není vlastní vektor $\mathbf{B}$, příslušný vlastní hodnotě 4.
- 3 To ale znamená, že $(\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{o}$. Takže $\mathbf{e}_2$ je „zobecněný vlastní vektor řádu 2“ pro vlastní hodnotu 4.

Celkově: $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \ker((\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2)$, tj., $\text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je „vlastní podprostor řádu 2“ a prostor $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na

$$\ker((\mathbf{B} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2) \quad \text{a} \quad \underbrace{\ker((\mathbf{B} - 9 \cdot \mathbf{E}_3)^1)}_{=\text{eigen}(9; \mathbf{B})}$$

Funguje myšlenka zobecněných vlastních podprostorů také pro matici $\mathbf{A}$?

Ano: prostor $\mathbb{R}^3$ se „rozkládá“ na

$$\underbrace{\ker((\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2)}_{=\text{eigen}(4;\mathbf{A})} \quad \text{a} \quad \underbrace{\ker((\mathbf{A} - 9 \cdot \mathbf{E}_3)^1)}_{=\text{eigen}(9;\mathbf{A})}$$

protože

$$(\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

a tudíž

$$\ker((\mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}_3)^2) = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \text{eigen}(4; \mathbf{A})$$

Další analýza matic **A** a **B**

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}}.$$

Existuje k tak, že $\mathbf{N}^k$ je nulová matice (zvolte $k = 1$) a platí rovnost $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$.

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{N}}.$$

Existuje k tak, že $\mathbf{N}^k$ je nulová matice (zvolte $k = 2$) a platí rovnost $\mathbf{D} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$.

Hlavní myšlenky Jordanova^a tvaru

^aMarie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922) byl francouzský matematik.

Jordanův tvar lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ je součet $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{diag}} + \mathbf{f}_{\text{nil}}$, kde

- 1 $\mathbf{f}_{\text{diag}}$ je **diagonalisovatelné**.
- 2 $\mathbf{f}_{\text{nil}}$ se „**příliš neliší**“ od nulového zobrazení $\mathbf{o}$. Přesněji:
 $(\mathbf{f}_{\text{nil}})^k = \mathbf{o}$ pro nějaké přirozené číslo k .
- 3 $\mathbf{f}_{\text{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\text{diag}} = \mathbf{f}_{\text{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\text{nil}}$.

Namísto Jordanova tvaru lineárního zobrazení hledáme většinou **Jordanův tvar jeho matice**.

V určité bázi (které se říká **Jordanova báze**) bude tedy matice mít „**téměř diagonální tvar**“.

Uvedeme pouze příklady a nenaučíme se hledat Jordanovu bázi.^a

Výpočty jsou technické, více se lze dočíst v Kapitole 11 **skript**.

^aTo jest: bázi zobecněných vlastních podprostorů.

K čemu je to dobré?

Budeme moci počítat mocniny^a

$$\mathbf{f}^m = (\mathbf{f}_{\text{diag}} + \mathbf{f}_{\text{nil}})^m$$

Protože $\mathbf{f}_{\text{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\text{nil}} = \mathbf{f}_{\text{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\text{diag}}$, lze použít **binomickou větu**,^b tj.,

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_{\text{diag}} + \mathbf{f}_{\text{nil}})^m &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\text{diag}})^j}_{\text{snadné}} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\text{nil}})^{m-j}}_{=0 \text{ pro } m-j \geq k} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} \cdot (\mathbf{f}_{\text{diag}})^j \cdot (\mathbf{f}_{\text{nil}})^{m-j} \end{aligned}$$

^aTo je v nejrůznějších aplikacích velmi důležité, viz téma 08B.

^bPozor: **pro obecná lineární zobrazení binomická věta neplatí**. Například pro matice $n \times n$ platí rovnost $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2$, ale rovnost $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ **platí pouze, pokud $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$** .

Připomenutí značení

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$ značíme $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}_L$ a $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^k$ pro $k \geq 0$.

Definice (nilpotentní zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$, pro které existuje přirozené číslo k tak, že $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$, říkáme **nilpotentní**. Nejmenšímu takovému číslu k říkáme **index nilpotence** a značíme jej $\text{nil}(\mathbf{f})$.

Poznámka

Protože $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}_L$, je index nilpotence $\mathbf{f}$ „téměř vždy“ větší než 0. Jediné zobrazení $\mathbf{f} : L \rightarrow L$, pro které je $\text{nil}(\mathbf{f}) = 0$, je $\mathbf{f} = \mathbf{id}_L = \mathbf{o}$ pro $L = \{\vec{0}\}$.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, platí $\text{nil}(\mathbf{N}) = 3$.

Pojďme „stopovat“ cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{0}$$

Všechny čtyři báze vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice $\mathbf{N}$ je nilpotentní. Navíc $\text{nil}(\mathbf{N})$ je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj. $\text{nil}(\mathbf{N})$ je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je nilpotentní: její řetězce jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\mapsto \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_3 &\mapsto 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

a proto platí $\text{nil}(\mathbf{N}) = 3$.

Definice

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme **Jordanova buňka**.^a

^aBuňka v této definici má rozměry $n \times n$.

Pozorování

Každá Jordanova buňka je nilpotentní matice. Index nilpotence je roven rozměrům buňky.

Nalezení Jordanova tvaru matice $M : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

- ❶ Spočteme charakteristický polynom $\text{char}_M(x)$ matice M .
 - ❶ Pokud $\text{char}_M(x)$ **nelze** v $\mathbb{F}[x]$ **rozložit** na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice M **neexistuje**.
 - ❷ Pokud $\text{char}_M(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice M **existuje** a my postupujeme podle dalších bodů.
- ❷ Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $B_i(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, p$. Segment $B_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
- ❸ Nalezení i -tého segmentu $B_i(\lambda_i)$:
 - ❶ Utvoříme nilpotentní matici $M - \lambda_i \cdot E_n$. a nalezneme její Jordanův tvar N_i .
 - ❷ Platí $B_i(\lambda_i) = N_i + \lambda_i \cdot E_{m_i}$.
- ❹ Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice M jakožto blokově diagonální matici.

Příklad

Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ nalezneme její Jordanův tvar.

- ❶ Platí $\text{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x - 2)^4(x + 1)^2$.

Jordanův tvar $\mathbf{M}$ bude mít dva Jordanovy segmenty:

- ❶ Segment $\mathbf{B}_1(2)$ velikosti 4×4 , protože násobnost 2 jako kořene charakteristické rovnice je 4.
- ❷ Segment $\mathbf{B}_2(-1)$ velikosti 2×2 , protože násobnost -1 jako kořene charakteristické rovnice je 2.

Příklad (pokrač.)

② Celkově: Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ je

$$\mathbf{M} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\| \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$$

Příklad

Připomenutí: pro čtvercovou matici $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) lze definovat

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!}$$

a výsledkem je opět čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$).
Navíc: pro funkci $t \mapsto \exp(t\mathbf{X})$ **reálné proměnné** platí rovnost

$$\frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \exp(t\mathbf{X})$$

a to umožňuje **elegantně řešit soustavy lineárních diferenciálních prvního řádu s konstantními koeficienty**, viz Dodatek O **skript**.

Matici $\exp(t\mathbf{X})$ lze snadno spočítat, známe-li Jordanův tvar matice $\mathbf{X}$.

Příklad (pokrač.)

Například: víme, že platí

$$t\mathbf{M} \approx t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\text{diag}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\text{nil}}}$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Příklad (pokrač.)

To znamená, že^a

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbf{M}) &\approx \exp(t\mathbf{M}_{\text{diag}} + t\mathbf{M}_{\text{nil}}) = \exp(t\mathbf{M}_{\text{diag}}) \cdot \exp(t\mathbf{M}_{\text{nil}}) \\ &= \exp(t\mathbf{M}_{\text{diag}}) \cdot \left(\mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\text{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\text{nil}}^2 \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

^aRovnost $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B})$ platí pouze tehdy, když $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
 Exponenciála **diagonální** matice se počítá snadno. Exponenciála **nilpotentní matice** se počítá v **konečně krocích**. V našem případě platí $\text{nil}(\mathbf{M}_{\text{nil}}) = 3$, proto

$$\exp(t\mathbf{M}_{\text{nil}}) = \mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\text{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\text{nil}}^2.$$

Abstraktní skalární součin

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1 a 12.2 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Velmi důležitá poznámka

Vektor byl definován (viz témata 01A a 01B) jako **prvek lineárního prostoru**.

Pro obecný vektor **nelze mluvit** o jeho délce, **nelze mluvit** o úhlu mezi dvěma vektory, atd.

K tomu, abychom o délkách, úhlech, atd., mluvit mohli, je třeba **přidat k axiomům lineárního prostoru axiomy další**. Této dodatečné struktury budeme říkat **skalární součin**.

Jde o úvodní kurs.^a Proto **se omezíme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$** .

^aObecněji lze studovat lineární prostor nad $\mathbb{F}$, vybavený jistou bilineární/sesquilineární formou.

Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.^a
- 2 Skalární součin zavedeme **axiomaticky**. Odvodíme geometrický význam skalárního součinu.^b

Axiomatické zavedení skalárního součinu nám umožní převést známé významy z $\mathbb{R}^n$ (kolmost, délka vektoru, atd) do obecných lineárních prostorů se skalárním součinem.

^aVelmi málo řekneme i o lineárních prostorech nad $\mathbb{C}$. Důvod: fyzika a kvantové počítání.

^b**Slogan:** skalární součin je míra „odchylky“ dvou vektorů.

Příští přednáška

- 1 Popis obecných skalárních součinů v prostorech $\mathbb{R}^n$.

Definice (reálný skalární součin)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme **skalární součin**,^a pokud platí následující, pro libovolné vektory $\vec{x}, \vec{y}$:

- ❶ **Komutativita**: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$.
- ❷ **Linearita ve druhé souřadnici**: zobrazení $\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární.
- ❸ **Positivní definitnost**: $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ iff $\vec{x} = \vec{o}$.

^aNaše značení pro skalární součin je obvyklé ve fyzice (tzv **bra-ket notation** nebo **Diracova notace**) a má jisté výhody. Značení $\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro skalární součin **nebudeme používat**! Důvod: přetížení značky $\cdot$ pro součin.

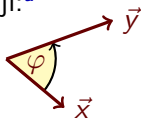
Poznámka (skalární součin pro prostory nad $\mathbb{C}$)

V případě lineárního prostoru nad $\mathbb{C}$ mluvíme o skalárním součinu, pokud $\langle - | - \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ je pozitivně definitní, lineární ve druhé souřadnici a **místo komutativity** platí rovnost $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$.

Příklady skalárních součinů

- ① Skalární součin v prostoru orientovaných úseček:

$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi$, kde $\|\vec{x}\|$ a $\|\vec{y}\|$ jsou délky úseček $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a φ je úhel, který svírají:^a



Tento skalární součin splňuje všechny tři požadované vlastnosti: je komutativní, lineární ve druhé souřadnici a pozitivně definitní.

^a**Důležitá poznámka:** v další části přednášky ukážeme, že pro libovolný skalární součin je možné definovat pojmy **délky** $\|\vec{x}\|$ vektoru $\vec{x}$ (také: **normy** vektoru $\vec{x}$) a **úhlu** φ mezi dvěma vektory tak, že platí rovnost

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi.$$

V prostoru s obecným skalárním součinem se tudíž budeme moci „chovat stejně“ jako v klasické geometrii. Bude tak například platit Pythagorova věta, a podobně.

Příklady skalárních součinů (pokrač.)

② **Standardní** skalární součin v $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$.

③ Standardní skalární součin není jediný skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Například^a $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$ je skalární součin v $\mathbb{R}^2$. (Jde o úmorné, ale užitečné cvičení.)

④ **Standardní** skalární součin v $\mathbb{C}^n$: $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$.

Pozor! Platí rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle}$, **nikoli** $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle$.

^aK tomuto skalárnímu součinu se vrátíme koncem této přednášky. Po příští přednášce budeme schopni (téměř) okamžitě uvidět, že jde o skalární součin. Budeme také schopni popsat **všechny** možné skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení (nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski)

Platí $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}$.

Důkaz.

Platí $0 \leq \langle \vec{x} + a\vec{y} | \vec{x} + a\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}_C + a \underbrace{2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}_B + a^2 \underbrace{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}_A$, pro

každé $a \in \mathbb{R}$.

Tudíž $B^2 - 4AC \leq 0$, neboli $B^2 \leq 4AC$. Z toho nerovnost

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle} \text{ plyne okamžitě.}$$

Jednoduchý, ale důležitý důsledek: úhel mezi vektory

Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y}$ platí $-1 \leq \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}} \leq 1$. Úhlu φ

$$= \cos \varphi \text{ pro jediné } \varphi \in [0; \pi]$$

říkáme **úhel mezi vektory** $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Definice (norma vektoru)

Normu vektoru $\vec{x}$ definujeme^a jako $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$.

^aNerovnost C-S-B tedy můžeme zapsat jako $|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Tvrzení (vlastnosti normy)

Platí:

- 1 $\|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{x}\| = 0$ iff $\vec{x} = \vec{0}$.
- 2 $\|a \cdot \vec{x}\| = |a| \cdot \|\vec{x}\|$.
- 3 **Trojúhelníková nerovnost:** $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Důkaz.

Jediná netriviální vlastnost je trojúhelníková nerovnost. Upravujte:
 $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$ a použijte
 nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski:

$$\|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Celkově: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$, tedy $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ■

Důsledek

Pro nenulová $\vec{x}$, $\vec{y}$ platí rovnost $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi$.

Poznámka

Předchozí důsledek je **stejná** rovnost, která platí pro „klasický“ skalární součin v prostoru orientovaných úseček!

Definice (ortogonalita vektorů)

Pokud $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, mluvíme o **ortogonálních** (také: **navzájem kolmých**) vektorech.

Několik poznámek o ortogonalitě

- 1 **Neřekli jsme**, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou na sebe kolmé, pokud svírají úhel $\frac{\pi}{2}$. Taková úvaha platí pouze pro **nenulové** vektory. Chceme ovšem hovořit i o nulovém vektoru, proto jsme definovali kolmost rovností $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

- ② **Pozor:** nulový vektor $\vec{o}$ je kolmý na každý vektor $\vec{x}$.

Důvod: z definice skalárního součinu víme, že zobrazení

$$\langle \vec{x} | - \rangle : L \rightarrow \mathbb{R}$$

je lineární. Proto $\langle \vec{x} | - \rangle$ musí poslat nulový vektor na nulový vektor, neboli musí platit rovnost

$$\langle \vec{x} | \vec{o} \rangle = 0$$

Obráceně: jestliže $\vec{x}$ je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.

Důvod: podle předpokladu je $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$. Z definice skalárního součinu plyne, že $\vec{x} = \vec{o}$.

Několik poznámek o ortogonalitě (pokrač.)

- ③ Chceme-li pro nějaký vektor $\vec{x}$ ověřit, že $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ pro každý vektor $\vec{w}$ ze $W = \text{span}(M)$, stačí ověřit, že platí $\langle \vec{x} | \vec{m} \rangle = 0$ pro všechny vektory $\vec{m}$ z M .

Důvod: pro obecný vektor $\vec{w}$ ze $\text{span}(M)$ nastane jedna ze dvou situací:

① $\vec{w} = \vec{0}$. Pak $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$.

② $\vec{w} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{m}_i$ pro nějaká a_i z $\mathbb{R}$ a nějaká $\vec{m}_i$ z M . Pak

$$\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{x} | \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{m}_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \langle \vec{x} | \vec{m}_i \rangle$$

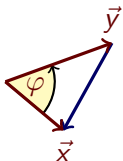
Jestliže tedy je $\langle \vec{x} | \vec{m}_i \rangle = 0$ pro každé i , platí $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$.

Slogan: ortogonalitu stačí ověřovat pouze pro množinu generátorů podprostoru.

Ortogonalitou se budeme podrobněji zabývat v příštích přednáškách.

Příklady (geometrie prostoru se skalárním součinem)

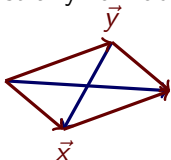
- ① **Kosinová věta:** Nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují **trojúhelník**



$$\text{Platí: } \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \underbrace{2 \cdot \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}_{2 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi}.$$

Případu, kdy $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, se říká **Pythagorova věta**.

- ② **Rovnoběžníková rovnost:** Dva nenulové vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ určují strany rovnoběžníka s úhlopříčkami $\vec{x} - \vec{y}$ a $\vec{x} + \vec{y}$.



$$\text{Platí: } \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2).$$

Upravujte:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y} \rangle = \dots$$

Poznámky (vztah skalárního součinu, normy a metriky)

Skalární součin indukuje normu a ta indukuje **metriku** (také: **distanci**) na množině L . Jde o funkci $d : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje:

- ① $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$, rovnost nastává právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{y}$.
- ② $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.
- ③ $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Stačí definovat $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

O prostoru L s metrikou d mluvíme jako o **metrickém lineárním prostoru**.

Pro lineární prostory platí:^a skalární součin $\rightsquigarrow$ norma $\rightsquigarrow$ metrika.

^aObrácené implikace **neplatí**. Například $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \neq y, \\ 0, & \text{když } x = y, \end{cases}$ je metrika na $\mathbb{R}$, která nevznikla z žádné normy na $\mathbb{R}$ (tj. $\|x\| = d(0, x)$ **není norma**). Norma $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|$ na $\mathbb{R}^2$ nevznikla z žádného skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$, protože **nesplňuje rovnoběžníkovou rovnost**.

Poznámka

Prostory se skalárním součinem se chovají tak, jak jsme zvyklí z klasické geometrie. Klasická geometrie nemusí být vždy vhodná.

Příklad (Minkowského časoprostor)

Na $\mathbb{R}^4$ definujte^a $\left\langle \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = tt' - xx' - yy' - zz'$. Protože $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$, **nejde** o pozitivně definitní „skalární součin“.

Tento „skalární součin“ je velmi důležitý v **teorii relativity**. Příslušnému pojmu „vzdálenosti“ vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^4$ se říká **metrika Minkowského**^b **časoprostoru**.^c

^aExistuje i druhá „znaménková konvence“ daná vzorečkem $-tt' + xx' + yy' + zz'$. Volba znaménkové konvence nemá fyzikální význam.

^bHermann Minkowski (1864–1909) byl vynikajícím německým matematikem.

^cV tomto časoprostoru je rychlost světla c rovna 1.

Příklad (Lorentzova^a transformace)

^aHendrik Antoon Lorentz (1853–1928) byl významný holandský fyzik.

Pohyb podsvětelnou rychlostí v ve směru osy x v Minkowského časoprostoru je lineární zobrazení $\mathbf{L} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, pro které platí

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \cdot (t - vx) \\ x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \text{kde } 0 \leq v < c = 1 \text{ a } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^4$ má zobrazení $\mathbf{L}$ matici

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -v \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -v \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $\varphi = \ln(\gamma(1 + v))$. Pohyb ve směru osy x podsvětelnou rychlostí v v Minkowského časoprostoru lze tedy interpretovat jako **rotaci** (v rovině dané osami t a x) o úhel φ v **hyperbolické geometrii**.

Příklad (rotace a standardní skalární součin)

Připomenutí: rotace o úhel α je $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde^a

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \rangle &= (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Tudíž platí: $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}\|$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} - \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{y}\|$.

Ukázali jsme: **rotace zachovává standardní skalární součin, normu a metriku.**

^aPovšimněme si: $\mathbf{R}_\alpha^T = \mathbf{R}_\alpha^{-1}$.

Tvrzení

Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- ① $\mathbf{A}$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$.
- ② $\mathbf{A}$ je regulární a platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz.

Z (1) plyne (2):^a $\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$,
takže $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n$.

Ze (2) plyne (1):

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle. \quad \blacksquare$$

^aPřipomenutí: pro Kroneckerův symbol δ platí $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ii} = 1$.

Poznámka (základní transformace prostoru $\mathbb{R}^2$)

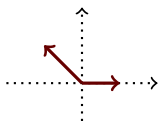
Projekce na osy a změna měřítka **nezachovávají** standardní skalární součin! Rotace skalární součin zachovávají (viz předchozí příklad).
Reflexe podle os x a y standardní skalární součin zachovávají.

Příklad (netradiční skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$ v $\mathbb{R}^2$ platí

rovnost $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$.

To znamená, že náš skalární součin „vidí“ vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jako **navzájem kolmé**:



To může být velmi praktické. Jak tedy rozpoznat obecný skalární součin? Všimněme si, že náš součin je zadán jistou **maticí G**:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = (x_1 \quad x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$$

Co dál?

Budeme chtít pochopit, které matice **G** zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Uvidíme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ přesně odpovídají maticím, kterým říkáme **pozitivně definitní**.

Charakterisace skalárních součinů v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1, 12.2 a 12.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.
- 2 Charakterisace matic, které zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.
- 3 Konstrukce skalárních součinů požadovaných vlastností.

Příští přednášky ke skalárnímu součinu

- 1 Ortogonální báze a ortonormální báze.
- 2 Ortogonalizační proces a ortonormalizační proces.
- 3 Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Připomenutí (dva různé skalární součiny v $\mathbb{R}^2$)

① **Standardní** skalární součin:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= (x_1 \ x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

② „Nezvyklý“ skalární součin:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 \\ &= (x_1 \ x_2) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V obou případech je součin **zadán** jistou maticí typu 2×2 . Je to náhoda?

Co dál?

Ukážeme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ odpovídají přesně těm čtvercovým maticím, kterým říkáme pozitivně definitní.

Definice (pozitivně definitní matice)

Řekneme, že matice $\mathbf{G}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je **pozitivně definitní**, když existuje matice $\mathbf{R}$ s lineárně nezávislými sloupci tak, že $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

Poznámky

- 1 Protože $\mathbf{G}^T = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{G}$, je každá pozitivně definitní matice $\mathbf{G}$ **symetrická**.

Poznámky (pokrač.)

- ② Positivně definitní matice $\mathbf{G}$ zobecňují kladná reálná čísla: matice $\mathbf{R}$ je „druhá odmocnina“^a matice $\mathbf{G}$.

Opravdu: Matice $\mathbf{G} = (g)$ typu 1×1 je positivně definitní právě tehdy, když $g > 0$.

① Ať $\mathbf{G} = (g) = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$. Pak $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ a platí $g = r_1^2 + \cdots + r_n^2$.

Protože jediný sloupec $\mathbf{R}$ musí být lineárně nezávislý, je $g > 0$.

- ② Je-li $g > 0$, platí $(g) = (\sqrt{g})^T \cdot (\sqrt{g})$. Protože $\sqrt{g} > 0$, je jediný sloupec matice $\mathbf{R} = (\sqrt{g})$ lineárně nezávislý. Matice $\mathbf{G}$ je tudíž positivně definitní.

^aJde jen o **slogan**: matice $\mathbf{R}$ **není určena jednoznačně**. Například platí

$$(4) = (2)^T \cdot (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Věta (charakterisace pozitivně definitních matic)

Pro matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ nad $\mathbb{R}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní.
- 2 Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a determinanty všech matic $\mathbf{G}_k = (g_{ij})_{i=1,\dots,k,j=1,\dots,k}$, kde $1 \leq k \leq n$, jsou kladné.^a
- 3 Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a nerovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$ (rovnost platí pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
- 4 Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a $\text{char}_{\mathbf{G}}(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné.
- 5 Existuje **regulární** matice $\mathbf{R}$ tak, že platí $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

^aTento test pozitivní definitnosti budete využívat v analýze pro určování lokálních minim funkcí více proměnných.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký, pro zájemce: Tvzení 12.3.4 **skript**).

Poznámka o Choleskyho faktorizaci — **nepovinné**

- 1 Připomenutí **definice**: $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ **má lineárně nezávislé sloupce**.
- 2 Předchozí **věta**: $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ **je regulární**.
- 3 **Zesílení věty**: $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ **je regulární v horním blokovém tvaru**.

Rovnosti $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ pro regulární matici $\mathbf{R}$ v horním blokovém tvaru se říká **Choleskyho faktorizace** matice $\mathbf{G}$.

Příklad Choleskyho faktorizace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 12 \\ 8 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Choleskyho faktorizaci lze nalézt algoritmem, viz **skripta**,
Příklad 12.3.6. Tento algoritmus je **nepovinný**.

Příklady

- 1 Protože $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T \cdot \mathbf{E}_n$, je jednotková matice $\mathbf{E}_n$ pozitivně definitní.

Připomeňme: $\mathbf{E}_n$ zadává standardní skalární součin
 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^n$.

- 2 Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní podle předchozí věty: $\mathbf{G}$ je symetrická a platí nerovnosti $\det(\mathbf{G}_1) = \det(1) > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) > 0$.

Připomeňme: $\mathbf{G}$ zadává „nezvyklý“ skalární součin
 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Příklady (pokrač.)

3 Matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

není pozitivně definitní podle předchozí věty: platí
 $\det(\mathbf{G}_1) > 0$, $\det(\mathbf{G}_2) < 0$, $\det(\mathbf{G}_3) > 0$, $\det(\mathbf{G}_4) < 0$.

Připomeňme (minulá přednáška): $\mathbf{G}$ zadává „skalární součin“
 $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v Minkowského časoprostoru $\mathbb{R}^4$.

Věta (obecný tvar skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$)

- ① Ať $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$.
Potom maticový součin

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

definuje skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

- ② Každý skalární součin $\langle - | - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ definuje pozitivně definitní^a matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$, kde $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle$.
Potom platí rovnost $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

^aMatici $\mathbf{G}$ říkáme **metrický tensor** (také: **Gramova matice**) skalárního součinu $\langle - | - \rangle$.

Důkaz.

Přednáška.



Příklad (popis všech skalárních součinů v $\mathbb{R}^2$)

Matice $\mathbf{G}$ rozměrů 2×2 nad $\mathbb{R}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když platí:

- ① $\mathbf{G}$ je symetrická matice.
- ② $\det(\mathbf{G}_1) > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) > 0$.

To znamená: $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{kde } a > 0 \text{ a } ac - b^2 > 0$$

Neboli: vzorec

$$ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$$

zadává skalární součin $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ v $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí nerovnosti $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$.

Příklad (jednotková kružnice pro skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro pozitivně definitní^a matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ a příslušný skalární součin $\langle - | - \rangle$ je množina^b

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \right\}$$

jednotková kružnice se středem v počátku.

Protože^c $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|$ a protože

$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = 1$ právě tehdy, když $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1$, platí

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 1 \right\}$$

a my ukážeme, že S_1 je elipsa.

^aPřipomenutí: platí $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$.

^bPřipomenutí: d je metrika vytvořená skalárním součinem $\langle - | - \rangle$.

^cPřipomenutí: $\| - \|$ je norma vytvořená skalárním součinem $\langle - | - \rangle$.

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

Například úpravou na čtverec je

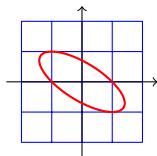
$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid a(x_1 + \frac{b}{a}x_2)^2 + \frac{ac - b^2}{a}x_2^2 = 1 \right\}$$

Protože platí $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$, je S_1 opravdu elipsa.

Například pro $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ je

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

s (očekávaným) grafem



Připomenutí

Minulá přednáška: každý skalární součin vytváří normu.

Je-li $\langle - | - \rangle$ skalární součin na $\mathbb{R}^n$, pak

- 1 vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou **ortogonální** (také: **navzájem kolmé**), pokud $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0$,
- 2 **norma** (také: **velikost**) vektoru $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}$,
- 3 vektor $\mathbf{x}$ je **normovaný**, pokud $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Tvrzení (kanonická báze $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$)

Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ a kanonickou bázi

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \text{ v } \mathbb{R}^n \text{ platí: } \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases}.$$

^aTakovým bázím budeme říkat **ortonormální** a obecně je budeme studovat příště. To jest: vektory takové báze jsou na sebe navzájem kolmé a každý vektor takové báze má normu 1.

Věta (každou bázi $\mathbb{R}^n$ lze považovat za ortonormální)

Ať $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze $\mathbb{R}^n$. Potom existuje **jediný** skalární součin $\langle - | - \rangle$ takový, že $\langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Důkaz.

Označme $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, připomenutí (téma 05B):

$\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, čili $\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, pro vš $i = 1, \dots, n$.

- Existence hledaného skalárního součinu.

Definujte $\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_n \mapsto B}$. Potom matice $\mathbf{G}$ je pozitivně definitní a platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle &= \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j \\ &= \underbrace{\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T}_{=(\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i)^T = \mathbf{e}_i^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_j}_{=\mathbf{e}_j} \\ &= \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Důkaz (pokrač.)

- ② Jednoznačnost hledaného skalárního součinu.

At' $\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. Ukážeme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

Opravdu: platí $\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{b}_j = 0$ pro vš. i, j .

To znamená $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i)^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ pro vš. i, j , neboli $\mathbf{e}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro vš. i, j .

Ukázali jsme rovnost $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \mathbf{O}_{n,n}$.

Protože $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ i $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T$ jsou regulární, platí
 $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = \mathbf{O}_{n,n}$.

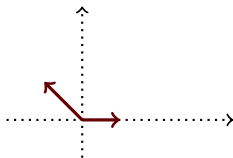
Tudíž $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.



Příklad

Najděte skalární součin v $\mathbb{R}^2$ takový, aby vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ byly navzájem kolmé a každý měl normu 1.

Obrázek:



Skalární součin nalezneme podle předchozího tvrzení:

❶ Pro $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je^a $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tudíž

$$\mathbf{G} = ((\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1})^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

^aInverzi matice $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ nalezneme nejrychleji pomocí adjungované matice.

Příklad (pokrač.)

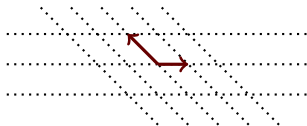
- 2 Hledaný skalární součin je

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 \cdot x_2 y_2.$$

- 3 Lze snadno spočítat: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

Nalezený skalární součin „vidí“



jako jednotkovou pravoúhlou sítí.

Co zatím v $\mathbb{R}^n$ umíme

Pro **zadanou** bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ **umíme sestavit skalární součin** $\langle - | - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ je ortonormální báze vzhledem k $\langle - | - \rangle$.

Příště se v $\mathbb{R}^n$ naučíme

Pro **zadanou** bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a **zadaný skalární součin** $\langle - | - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ **nalezneme novou bázi** $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$, která je ortonormální vzhledem k $\langle - | - \rangle$.

Hledaná báze bude **navíc splňovat** rovnost $\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k) = \text{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k)$ pro všechna $k = 1, \dots, n$.

K tomu bude zapotřebí **zavedení nových pojmů**: ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Ortogonalisace a ortogonální projekce

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4
skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Definice skalárního součinu v lineárních prostorech nad $\mathbb{R}$.
- 2 Úplný popis skalárních součinů v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Dnešní přednáška

- 1 V této přednášce (a ve **všech** přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.
- 2 Ortogonální báze a ortonormální báze.
- 3 Ortogonální projekce. Ortogonalisace a ortonormalisace.

Důležitá aplikace — viz příští přednášku

- 1 Metoda nejmenších čtverců.

Připomenutí vlastností ortogonality (minulé přednášky)

Platí-li $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, říkáme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou **ortogonální** (také: **navzájem kolmé**).

- 1 **Pozor**: nulový vektor $\vec{o}$ je kolmý na každý vektor $\vec{x}$.
Obráceně: jestliže $\vec{x}$ je kolmý na každý vektor, pak $\vec{x} = \vec{o}$.
- 2 Abychom ukázali, že rovnost $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ platí pro každý vektor $\vec{w}$ ze $W = \text{span}(M)$, **stačí ukázat**, že pro všechny vektory $\vec{m}$ z M platí rovnost $\langle \vec{x} | \vec{m} \rangle = 0$.

Speciální případ výše uvedeného je:^a

Ať $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k)$ je báze lineárního podprostoru W lineárního prostoru L . Jestliže platí $\langle \vec{x} | \vec{b}_i \rangle = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, k$, potom platí $\langle \vec{x} | \vec{w} \rangle = 0$ pro všechny vektory $\vec{w}$ z W .

^aTento speciální případ několikrát (bez dalších komentářů) v dnešní přednášce použijeme.

Několik sloganů

- 1 Jestliže $\dim(L) = n$, potom každá ortogonální množina v L má nejvýše n prvků.

Slogan: v prostoru dimenze n může existovat maximálně n navzájem na sebe kolmých nenulových vektorů.

- 2 Ortogonální množině v L , která tvoří bázi L , říkáme **ortogonální báze**.

Slogan:^a ortogonální báze je pravoúhlý souřadnicový systém.

- 3 Každou bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ lze **normalisovat**: v bázi $(\frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}, \dots, \frac{\vec{b}_n}{\|\vec{b}_n\|})$ mají všechny vektory normu 1.

Slogan: normální báze má jednotkové úseky na jednotlivých souřadnicových osách.

^a**Pozor:** jde jen o slogan. Víme, že například leckterý skalární součin v rovině může jako ortogonální vidět vektory, které „na papíře“ nesvírají pravý úhel.

Definice (ortonormální báze, čili normální a ortogonální báze)

Bázi $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem, která splňuje rovnost $\langle \vec{b}_i | \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij}$,^a říkáme **ortonormální**.

^aKroneckerův symbol δ splňuje: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Poznámky

- 1 Kanonická báze $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.
- 2 Pro jakoukoli bázi $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje jednoznačně určený skalární součin, ve kterém je tato báze ortonormální (viz minulou přednášku).

Stejnou větu lze dokázat pro obecné prostory nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze. To dokazovat **nebudeme**.

- 3 Ortonormální báze jsou důležité: umožňují „zpříjemnit“ řadu výpočtů. Viz dále.

Tvrzení (výpočet souřadnic v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Pak^a $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$, čili $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 | \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n | \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$.

^aV tomto kontextu se používá i terminologie: $\langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle$ je **Fourierův koeficient** vektoru $\vec{x}$ vzhledem k ose $\vec{b}_i$, součet $\sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$ je **Fourierova řada** vektoru $\vec{x}$.

Důkaz.

Označme $\vec{s} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$. Musíme ukázat: $\vec{x} = \vec{s}$, tj., $\vec{x} - \vec{s} = \vec{o}$.

Pro libovolné pevné $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} - \vec{s} \rangle = \dots = 0$ (využíváme vlastnosti skalárního součinu a faktu, že B je ortonormální).

Takže $\vec{x} - \vec{s} = \vec{o}$, neboli $\vec{x} = \vec{s}$.



Důsledek (skalární součin v ortonormální bázi)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Pak platí:^a $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle$.

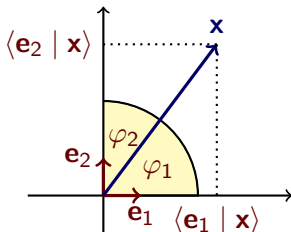
^aPodle předchozího to znamená: $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$, kde $\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{x}$ a $\mathbf{coord}_B(\vec{y}) = \mathbf{y}$. **Slogan:** skalární součin v ortonormální bázi se počítá jako standardní skalární součin souřadnicových vektorů. Příslušné rovnosti se říká **Parsevalova rovnost**.

Důkaz.

Spočteme Fourierovy řady: $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{b}_j \mid \vec{y} \rangle \cdot \vec{b}_j$.

Potom (využíváme vlastnosti skalárního součinu a faktu, že B je ortonormální) $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \dots = \sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle$. ■

Direction Cosines v rovině s ortonormální bází ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)



$$\cos \varphi_1 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\text{orientovaná délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{\langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ čili } \cos \varphi_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) = \sin \varphi_1$$

$$\text{Tudíž } \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1.$$

Tvrzení (Direction Cosines)

Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Ať vektor $\vec{x}$ je **nenulový**. Potom pro úhel φ_{i_0} , který vektor $\vec{x}$ svírá se souřadnicovou osou $\vec{b}_{i_0}$, platí rovnost^a

$$\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}. \text{ Navíc platí } \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = 1.$$

^a**Všimněme si:** tvrdíme, že $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle$, tj. i_0 -tá souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi B , se počítá jako součin $\|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$. To je zobecnění známého faktu z elementární geometrie roviny (viz předchozí stranu).

Důkaz.

Protože $\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle = \underbrace{\|\vec{b}_{i_0}\|}_{=1} \cdot \|\vec{x}\| \cdot \cos \varphi_{i_0}$, platí $\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}$.

$$\text{Dále: } \sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \langle \vec{b}_i | \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|^2} = 1. \quad \blacksquare$$

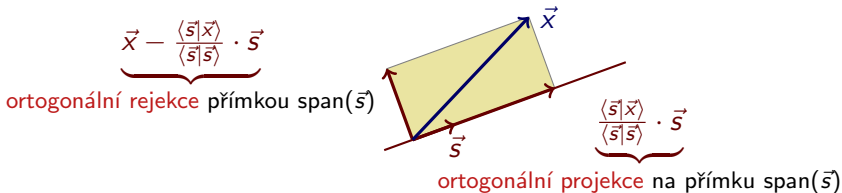
Ortogonalní projekce na přímku a ortogonalní rejekce přímkou

Ať $\vec{s} \neq \vec{0}$ je vektor v prostoru L se skalárním součinem $\langle - | - \rangle$.
Potom pro každý vektor $\vec{x}$ platí:

- 1 Vektor $\frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ zjevně leží na přímce $\text{span}(\vec{s})$.
- 2 Vektor $\vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s}$ je kolmý na přímce $\vec{s}$, protože platí

$$\langle \vec{s} | \vec{x} - \frac{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle} \cdot \vec{s} \rangle = \langle \vec{s} | \vec{x} \rangle - \underbrace{\langle \vec{s} | \vec{x} \rangle \cdot \frac{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s} | \vec{s} \rangle}}_{=1} = 0$$

Dostáváme tedy **ortogonalní rozklad^a** vektoru $\vec{x}$:

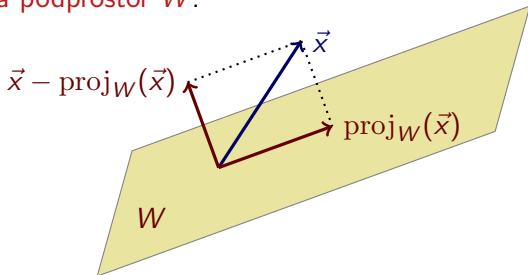


^aSlovník: **projekce**=promítnutí, **rejekce**=odmítnutí.

Zobecnění: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať $\vec{x}$ je libovolný vektor v L .

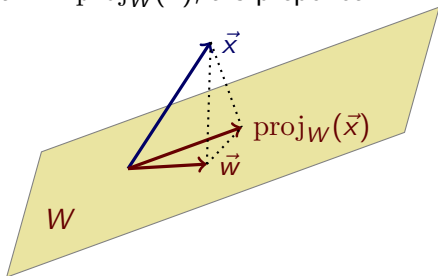
Vektoru $\text{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W , říkáme **ortogonální projekce** vektoru $\vec{x}$ na podprostor W .



Vektoru $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$ budeme říkat **ortogonální rejekce** vektoru $\vec{x}$ **podprostorem** W a budeme jej značit $\text{rej}_W(\vec{x})$.

Ortogonalní rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor $\vec{x}$, který neleží ve W , a pro jakýkoli vektor $\vec{w}$, který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy **pro všechny vektory** $\vec{w}$ z W platí^a

$$\|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x} - \text{proj}_W(\vec{x})\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x} - \vec{w}\|^2$$

^aNa této nerovnosti je založena **metoda nejmenších čtverců**, viz téma 11A.

At' $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ je konečná neprázdna **ortogonální** množina vektorů. Označme $W = \text{span}(M)$. Pro libovolný vektor $\vec{x}$ je

ortogonální projekce vektoru $\vec{x}$ na podprostor W .

Označte: $\vec{p} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{u}_i | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$. Potom platí:

- 1 $\vec{p}$ leží ve W .
- 2 Pro každé $i_0 = 1, \dots, k$ platí $\langle \vec{u}_{i_0} \mid \vec{x} - \vec{p} \rangle = \dots = 0$.

Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt)

Každou bázi $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ prostoru se skalárním součinem lze převést na bázi $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ s následujícími vlastnostmi:

- 1 C je **ortogonální**, tj $\langle \vec{c}_i | \vec{c}_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$.
- 2 Pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí
 $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$.

Důkaz.

Definujeme^a

$$\vec{c}_1 := \vec{b}_1, \quad \vec{c}_{k+1} := \underbrace{\text{rej}_{\text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}(\vec{b}_{k+1})}_{\text{rejekce vektoru } \vec{b}_{k+1} \text{ podprostorem } \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}}$$

Díky definici je splněno $\text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$, pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$.

První podmínka je splněna z definice ortogonální rejekce. ■

^a**Slogan:** Gram-Schmidt je posloupnost postupných ortogonálních rejekcí.

Poznámka (ortonormalizační proces)

Pokud je $C = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ ortogonální báze^a prostoru L , je seznam $(\frac{\vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|}, \dots, \frac{\vec{c}_n}{\|\vec{c}_n\|})$ **ortonormální** báze prostoru L (tj je ortogonální a norma každého prvku je 1):

$$\langle \frac{\vec{c}_i}{\|\vec{c}_i\|} \mid \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|} \rangle = \frac{1}{\|\vec{c}_i\| \cdot \|\vec{c}_j\|} \cdot \langle \vec{c}_i \mid \vec{c}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Každou konečnou bázi B v prostoru se skalárním součinem tedy lze ortonormalisovat:

- 1 Nejprve provedeme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces na bázi B . Dostaneme ortogonální bázi C .
- 2 Ortogonální bázi C znormalisujeme výše uvedeným postupem.

^aEvidentně pro každé i platí $\|\vec{c}_i\| \neq 0$, protože C je báze.

Příklad (ortogonalisace vektorů — Gram-Schmidt)

Vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně

nezávislé v $\mathbb{R}^4$. Příslušnou bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ podprostoru W dimenze 3 označíme B .

Báze B **není ortogonální** vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu v $\mathbb{R}^4$. Bázi B nyní ortogonalisujeme. Výsledné vektory v nové (ortogonální) bázi označíme $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Budeme postupovat Gram-Schmidtovou metodou.

$$\textcircled{1} \text{ První vektor: } \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad (pokrač.)

② Druhý vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_2 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1\}}(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik: protože skalární násobek nemění ortogonalitu,

$$\text{položíme } \mathbf{c}_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tím se zbavíme pozdějších nepříjemných výpočtů se zlomky.

Příklad (pokrač.)

- 3 Třetí vektor: spočteme

$$\mathbf{b}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}}(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Opět se zbavíme zlomků: } \mathbf{c}_3 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výpočet je u konce: seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ je hledaná ortogonální báze.

Příklad (normalisace ortogonální báze)

Normalisace ortogonální báze $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ podprostoru W v prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem je tvořena vektory

$$\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matice ortogonální projekce a metoda nejmenších čtverců

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 a Dodatku C skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Ortogonalizační proces (Gram-Schmidt).
- 2 Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.
- 3 Ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází.

Dnešní přednáška

V této přednášce se zaměříme **pouze** na lineární prostory $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.

- 1 Výpočet matice ortogonální projekce na podprostor $\text{im}(\mathbf{A})$ dimense k v $\mathbb{R}^n$ s metrickým tensorem $\mathbf{G}$, kde $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.
- 2 Charakterisace matic ortogonálních projekcí v $\mathbb{R}^n$.
- 3 Aplikace projekcí na řešení soustav lineárních rovnic (metoda nejmenších čtverců).

Motivační úvaha

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má hodnotu k a ať $\mathbf{G}$ je metrický tensor v $\mathbb{R}^n$.

- 1 Pokud soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ řešení má, je toto řešení **jediné**.
Důvod: $\mathbf{A}$ je monomorfismus (protože $\text{def}(\mathbf{A}) = 0$).
- 2 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení iff $\mathbf{b} \in \text{im}(\mathbf{A})$.
- 3 Co dělat, pokud $\mathbf{b} \notin \text{im}(\mathbf{A})$? Vyřešíme **jinou** soustavu $(\mathbf{A} \mid \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}))$.

Proč zrovna soustavu $(\mathbf{A} \mid \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}))$?

Protože $\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ je vektor z $\text{im}(\mathbf{A})$, který je k vektoru $\mathbf{b}$ **nejblíže** ze všech vektorů z $\text{im}(\mathbf{A})$.

$(\mathbf{A} \mid \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}))$ má **jediné** řešení. Tomuto jedinému řešení $\hat{\mathbf{x}}$ říkáme **řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců**.

Závěr: potřebujeme umět spočítat $\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$.

Matice ortogonální projekce na $\text{im}(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ má hodnost k

Ať $W = \text{im}(\mathbf{A})$, kde $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má hodnost k .
Ať $\mathbf{G}$ je metrický tensor v $\mathbb{R}^n$. Potom je matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}$ pozitivně definitní a platí^a

$$\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}}_{\text{tzv. matice ortogonální projekce } \mathbf{P}_W} \cdot \mathbf{x}$$

^aTento divoký vzorec má krotkou podobu **pro standardní skalární součin**:
platí $\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T}_{=\mathbf{P}_W} \cdot \mathbf{x}$, protože $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$.

Důkaz.

Přednáška.



Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se **standardním**^a skalárním součinem nalezněte

matici projekce na rovinu $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ matice ortogonální projekce na W .

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-14) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

^aMetrický tensor tedy je $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$.

Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem s metrickým tensorem^a

$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ spočtěte matici projekce na přímku $W = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$ matice ortogonální projekce.

Tudíž je

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

^aJde o **nestandardní** skalární součin: to znamená, že jde o ortogonální projekci vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

Věta (charakterisace matic ortogonálních projekcí)

Ať $\mathbb{R}^n$ je vybaven skalárním součinem $\langle - | - \rangle$ s metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Pro matici $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní:

- 1 $\mathbf{P}$ je matice ortogonální projekce na lineární podprostor W dimenze k .
- 2 $\text{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Poznámka

Pro **standardní** skalární součin v $\mathbb{R}^n$ (tj. pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$) lze druhou podmínku přeformulovat takto:

- 2 $\text{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Nalezení jediného řešení $\hat{\mathbf{x}}$ soustavy $(\mathbf{A} \mid \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}))$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) \\ &\Updownarrow && (\text{vzorec pro výpočet projekce}) \\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} \\ &\Updownarrow && (\mathbf{A} \text{ je monomorfismus}) \\ \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} \\ &\Updownarrow && (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \text{ je regulární}) \\ \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} \end{aligned}$$

Závěr: $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$ iff $\hat{\mathbf{x}}$ je jediné řešení soustavy

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b})$$

a tuto poslední soustavu lze získat jako součin matic

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

Příklad

Tři body $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ neleží na žádné přímce tvaru $y = ax + b$.^a

Proč? Protože soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array} \right)$ nemá řešení (Frobeniova věta).

Vyřešme soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců (pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$).^b

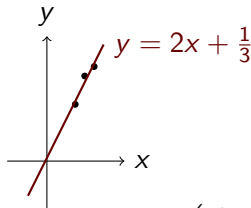
Soustava $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 50 & 12 & 104 \\ 12 & 3 & 25 \end{array} \right)$ a má jediné řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

^aBody na první pohled „téměř“ leží na přímce $y = 2x$.

^bŘešením získáme „nejlepší možnou“ přímku, kterou lze proložit zadanými body. Říká se jí **regresní přímka**.

Příklad (pokrač.)

To znamená: hledaná regresní přímka má tvar $y = 2x + \frac{1}{3}$.



Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ **není řešením** soustavy $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

$$\text{Platí } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}.$$

Čtverec chyby, které jsme se dopustili, je

$$\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2/3$$

Příklad (řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců, $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$)

Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$ nemá řešení (Frobeniova věta).

V našem případě $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{b})$ je soustava
 $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$ s jediným řešením $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ **není řešením soustavy** $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, protože $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ovšem jakýkoli jiný vektor $\mathbf{x}$ by „dopadl ještě hůře“. Pro všechny vektory $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$ totiž platí nerovnost

$$0.5 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

Poznámka

Pokud $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, musí být $\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$. Proto lze metodu nejmenších čtverců použít i pro nalezení řešení řešitelné soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, kde $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce.

Příklad

Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & -8 \\ 4 & 2 & 8 \end{array} \right)$ má (s použitím GEM) jediné řešení $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zvolte $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$. Pak platí $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 24 & 16 & 40 \\ 16 & 30 & -12 \end{array} \right)$. Tato soustava má jediné řešení $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Příklad (proložení paraboly, $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$)

Ať $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel.

Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ leží na parabole tvaru $y = ax^2 + bx + c$ právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

má řešení $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Příklad (proložení paraboly, $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$, pokrač.)

Důležité pozorování: protože $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je alespoň **tříprvková** množina reálných čísel, má matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

hodnost 3.

Opravdu: ať x_i, x_j, x_k jsou tři **navzájem různé** hodnoty z množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Potom

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_j^2 & x_j & 1 \\ x_k^2 & x_k & 1 \end{vmatrix} = (x_i - x_k) \cdot (x_i - x_j) \cdot (x_j - x_k) \neq 0$$

Příklad (proložení paraboly, $G = E_n$, pokrač.)

Ať $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel.

Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ lze proložit parabolou $y = ax^2 + bx + c$, kde $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ je řešením

soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců.

Možná další (nepovinná) literatura

Řešení soustav metodou nejmenších čtverců má řadu aplikací. Je základem **regresních metod** v matematické statistice, viz například knihu

- Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, 3rd ed, John Wiley & Sons, New York, 2003.

pro využití metody v případě $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$, a například knihu

- Tilo Strutz, *Data fitting and uncertainty: A practical introduction to weighted least squares and beyond*, 2nd ed, Springer, 2016.

pro využití metody v případě obecného metrického tensoru $\mathbf{G}$.

Historická poznámka

Autorem metody nejmenších čtverců je německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855). V roce 1801 Gauss tuto metodu použil pro predikci dráhy planety **Ceres**, která 40 dní po objevení^a zmizela evropským astronomům za Sluncem. Gauss předpověděl polohu, kde se planeta za 10 měsíců opět objeví.

Viz například článek

Donald Teets a Karen Whitehead, **The discovery of Ceres: How Gauss became famous**, *Mathematics Magazine* 72.2 (1999), 83–83.

nebo anglický překlad původní Gaussovy práce *Theoria Motus* z roku 1806

Karl Friedrich Gauss, **Theory of motion of the heavenly bodies moving about the Sun in conic sections**, Dover Publications, 2004.

^aPravděpodobně první pozorování provedl 1. ledna 1801 italský astronom Guiseppe Piazzi.

SVD rozklad a pseudoinverse

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 14 skript
Abstraktní a konkrétní lineární algebra.

Cíle této přednášky

- 1 Každá **symetrická** matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ má **pouze reálné vlastní hodnoty** a **je diagonalisovatelná**.^a
Navíc: vlastní vektory symetrické matice tvoří „**hezkou bázi**“ prostoru $\mathbb{R}^n$.
- 2 Jako důsledek předchozího ukážeme, že **každou** matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ lze napsat jako^b

$$\mathbf{M} = \underbrace{\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T}_{\text{SVD rozklad } \mathbf{M}}$$

kde $\mathbf{S}$ je „**diagonální**“ a $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ a $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$.

- 3 Ukážeme aplikace SVD rozkladu.

^aTento výsledek **nebudeme dokazovat**, vyžaduje hlubší znalosti z reálné analýzy.

^bVýpočty z této přednášky jsou časově velmi náročné. **U ústní zkoušky může být vyžadováno základní pochopení teorie (str 7 a 8 tohoto tématu), nikoli výpočty.**

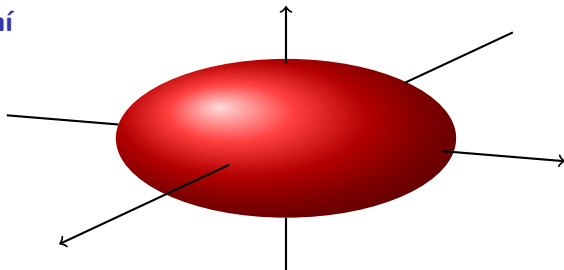
Věta o hlavních osách (pro standardní skalární součin)

Pro každou **symetrickou** reálnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje **ortonormální** báze $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Navíc matice $\mathbf{A}$ má pouze **reálné** vlastní hodnoty.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký). Viz Důsledek 14.1.5 **skript**. ■

Vysvětlení



$\mathbf{A}$ zobrazuje jednotkovou kouli na (případně degenerovaný) elipsoid.

Důsledek — SVD rozklad matice pro stand. skalární součin

Libovolnou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{USV}^T$, kde

- 1 $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ a $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ jsou **ortogonální**, tj. $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ a $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$.
- 2 $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ má na hlavní diagonále kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_h$ (tzv. **singulární hodnoty** matice $\mathbf{M}$), kde $h = \text{rank}(\mathbf{M})$. Všude jinde má matice $\mathbf{S}$ nuly.

Myšlenka důkazu

- 1 Matice $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T \mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ je symetrická. Její vlastní hodnoty jsou **nezáporné**. Seřad'te je: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0$. Označte příslušnou **ortonormální** bázi jako $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s)$.
- 2 Definujte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_s = \sqrt{\lambda_s}$. Vyberte **nenulová** σ_i : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_h > 0$ a definujte $\mathbf{u}_i = \mathbf{M}\mathbf{v}_i/\sigma_i$ pro $i = 1, \dots, h$ a doplňte na **ortonormální** bázi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$.

Příklad (SVD rozklad)

Nalezneme SVD rozklad pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

❶ $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 40 & 140 \\ 40 & 80 & 100 \\ 140 & 100 & 170 \end{pmatrix}$

❷ Vlastní hodnoty $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ jsou $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 0$.

Příslušná **ortonormální báze** vlastních vektorů je

$$\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right). \text{ Tudíž } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

❸ **Singulární hodnoty** $\mathbf{M}$ jsou $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 6\sqrt{10}$,

$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 3\sqrt{10}$. (Připomenutí: $\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{0}$ není singulární hodnota.)

Příklad (SVD rozklad, pokrač.)

④ $\mathbf{u}_1 = \mathbf{M}\mathbf{v}_1/\sigma_1$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}\mathbf{v}_2/\sigma_2$:

$$\frac{1}{6\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

⑤ Plný SVD rozklad $\mathbf{M}$ je:

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Geometrie SVD rozkladu $M = USV^T$ („pasivní“ pohled)

Matice $V = (v_1, \dots, v_s)$ a $U = (u_1, \dots, u_r)$ jsou tvořeny vektory nových ortonormálních bází B a C prostorů $\mathbb{R}^s$ a $\mathbb{R}^r$, ve kterých se $M : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ jeví jako změna měřítka $S : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$.

$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{T_{K_s \mapsto B}} \mathbb{R}^s \xrightarrow{S} \mathbb{R}^r \xrightarrow{T_{C \mapsto K_r}} \mathbb{R}^r$$

Protože $T_{K_s \mapsto B} = (T_{B \mapsto K_s})^{-1} = V^{-1} = V^T$ a $T_{C \mapsto K_r} = U$, je vrchní obrázek přesně diagram

$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{V^T} \mathbb{R}^s \xrightarrow{S} \mathbb{R}^r \xrightarrow{U} \mathbb{R}^r$$

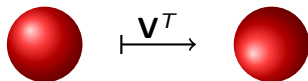
A to je přesně SVD rozklad matice M .

Jde o „pasivní“ pohled: mění se souřadnicové systémy.

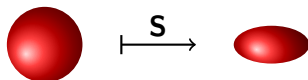
Geometrie SVD rozkladu $M = USV^T$ („aktivní“ pohled)

Obraz jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$ při zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$:

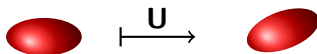
- ① Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{V}^T : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$:



- ② Změna měřítka (případně i s degenerací) $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$:



- ③ Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$:



Jde o „aktivní“ pohled: objekty rotují.

Redukce SVD rozkladu a aproximace SVD rozkladem

Plný SVD rozklad $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ matice $\mathbf{M}$ hodnosti h lze psát jako

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^h \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

kde $\mathbf{u}_j$ jsou sloupce $\mathbf{U}$ a $\mathbf{v}_j$ jsou sloupce $\mathbf{V}$.

Částečné součty

$$\mathbf{M}_k = \sum_{j=1}^k \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

pro $k \leq h$ mají hodnot k a platí

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \min \{ \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F \mid \mathbf{X} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r, \text{rank}(\mathbf{X}) \leq k \}$$

kde

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^s \mathbf{x}_j^T \cdot \mathbf{x}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r x_{ij}^2}$$

je **Frobeniova norma** matice $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s) = (x_{ij})$.

Příklad

Pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ lze psát její SVD rozklad

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

jako

$$\mathbf{M} = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (2/3 \quad 1/3 \quad 2/3) + 3\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (-2/3 \quad 2/3 \quad 1/3)$$

a

$$\mathbf{M}_1 = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot (2/3 \quad 1/3 \quad 2/3) = \begin{pmatrix} 18/15 & 9/15 & 18/15 \\ 6/15 & 3/15 & 6/15 \end{pmatrix}$$

Platí
$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{450}} \approx 0.477$$

Chyba při nahrazení částečným součtem SVD rozkladu

Platí rovnost:

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_h^2}$$

Speciálně:

$$\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_h^2}$$

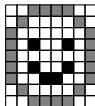
Podílu

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_h^2}{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_h^2}}$$

říkáme **relativní změna matice $\mathbf{M}$** (při nahrazení $\mathbf{M}$ k -tým částečným součtem jejího SVD rozkladu).

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat

Obrázek



lze zadat maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde 0 = bílá, 0.5 = šedá, 1 = černá.

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

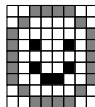
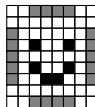
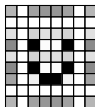
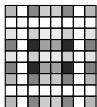
SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ má tvar $\mathbf{USV}^T$, kde matice $\mathbf{S}$ je:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ke kompresi stačí použijeme **singulární hodnoty** matice $\mathbf{M}$ (první čtyři prvky na hlavní diagonále $\mathbf{S}$). Hodnoty σ_5 až σ_8 jsou rovný nule.

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

Obrázky pro první čtyři aproximace matice $\mathbf{M}$ vypadají takto:



Relativní změny matice $\mathbf{M}$ jsou následující:

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.65$$

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.13^2 + 1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.45$$

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_3\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.00^2}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} \approx 0.30$$

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_4\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{0}{2.57^2 + 1.61^2 + 1.13^2 + 1.00^2}} = 0.00$$

Tvrzení

Ať $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ je matice. Potom existuje nanejvýš jedna matice $\mathbf{M}^+ : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$, která splňuje následující čtyři podmínky^a

$$\begin{array}{ll} \mathbf{M}\mathbf{M}^+\mathbf{M} &= \mathbf{M} & (\mathbf{M}^+\mathbf{M})^T &= \mathbf{M}^+\mathbf{M} \\ \mathbf{M}^+\mathbf{M}\mathbf{M}^+ &= \mathbf{M}^+ & (\mathbf{M}\mathbf{M}^+)^T &= \mathbf{M}\mathbf{M}^+ \end{array}$$

^aMatici $\mathbf{M}^+$, která tyto čtyři podmínky splňuje, říkáme **pseudoinverse** matice $\mathbf{M}$.

Důkaz.

Bez důkazu (není těžký, ale není zajímavý). Pro zájemce, viz Tvrzení 14.4.1 **skript**. ■

Příklady pseudoinversí

- 1 At' $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulární matice. Potom $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.
- 2 At' $\mathbf{O}_{s,r} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$. Potom $(\mathbf{O}_{s,r})^+ = \mathbf{O}_{r,s}$.
- 3 At' $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má hodnotu k . Potom $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$.

Pozorování: v tomto případě platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \text{proj}_{\text{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$$

Tudíž: $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ je řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců (pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$).

- 4 At' $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ má hodnotu k . Potom $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$.

V každém z případů stačí ověřit čtyři rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{M}^+\mathbf{M} &= \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}^+\mathbf{M}\mathbf{M}^+ = \mathbf{M}^+, \quad (\mathbf{M}^+\mathbf{M})^T = \mathbf{M}^+\mathbf{M}, \\ (\mathbf{M}\mathbf{M}^+)^T &= \mathbf{M}\mathbf{M}^+. \end{aligned}$$

Věta (nalezení pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Ať $\mathbf{M} = \mathbf{USV}^T$ je plný SVD rozklad matice $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$, ať $\sigma_1, \dots, \sigma_h$ jsou singulární hodnoty matice $\mathbf{M}$. Potom platí:

1 Matice

$$\mathbf{S}^+ = \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{e}_1, \dots, \frac{1}{\sigma_h} \mathbf{e}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \dots, \mathbf{o}}_{(r-h)\text{-krát}} \right)$$

je pseudoinverse matice $\mathbf{S}$.

2 Matice

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{VS}^+ \mathbf{U}^T$$

je pseudoinverse matice $\mathbf{M}$.

Důkaz.

Bez důkazu. Viz Důsledek 14.4.5 [skript](#).



Příklad (výpočet pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Nalezneme $\mathbf{M}^+$ pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Plný SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ je roven

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

a proto

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/(6\sqrt{10}) & 0 \\ 0 & 1/(3\sqrt{10}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{180} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 7 & 13 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Další aplikace SVD rozkladu — nepovinné

- 1 Pseudoinverse matic souvisí s **metodou nejmenších čtverců**, viz Dodatek C **skript**.
Metoda nejmenších čtverců slouží k „proložení optimální křivky“ naměřenými daty s **nejmenší kvadratickou chybou**.
- 2 **Latentní sémantické indexování** databází (také: **LSI**), viz Dodatek G **skript**.
Pro databáze lze vytvořit **vektorový model** a SVD rozklad lze použít k **vyhledání skrytých sémantických konceptů** v databázi.
- 3 **Analýza hlavní komponenty** (také: **PCA**), viz Dodatek G **skript**.
Při **analýze multidimensionálních dat** lze objevit „hlavní komponenty dat“, tj. lze nalézt **podstatné naměřené veličiny**.
- 4 A mnoho dalších aplikací. . .

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 7.1, 7.2
a 7.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co již víme? (přednášky z teorie soustav lineárních rovnic)

- 1 Pro $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$ a $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^r$ je obecné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tvaru $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$.
Množina $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$ je **d -dimensionální afinní podprostor** (kde $d = \text{def}(\mathbf{A})$) v prostoru $\mathbb{F}^s$. Tato plocha **prochází** bodem $\mathbf{p}$.
- 2 Jakoukoli podmnožinu prostoru $\mathbb{F}^s$ tvaru $\mathbf{p} + W$, kde W je **lineární podprostor** prostoru $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{p}$ je bod $\mathbb{F}^s$, lze považovat za množinu řešení nějaké vhodné soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Dnešní přednáška

- 1 Zaměříme^a se na **afinní podprostory** prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.
- 2 Budeme studovat **vzájemnou polohu** afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

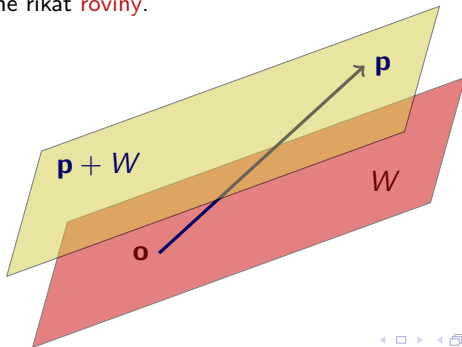
^aCelá dnešní přednáška projde v prostorech typu $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F}$ je těleso.

Definice

Množině $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je bod z $\mathbb{R}^n$, říkáme **afinní podprostor** prostoru $\mathbb{R}^n$.

Dimense^a afinního prostoru $\mathbf{p} + W$ je číslo $\dim(W)$. Lineárnímu prostoru W říkáme **směr** afinního podprostoru $\mathbf{p} + W$.

^aAfinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 0 budeme říkat **body**, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 1 budeme říkat **přímky**, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 2 budeme říkat **roviny**.



Příklady afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^4$

Množiny

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

jsou afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$. Jejich dimenze jsou postupně 0, 1, 2 a 3. A jejich směry jsou:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Příklad (vzájemná poloha přímk v $\mathbb{R}^3$, intuitivní výpočet)

- ❶ Přímk $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ jsou
rovnoběžné.

Obě přímky mají **stejný směr**, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ❷ Přímk $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ jsou
různoběžné.

To zjistíme následujícím způsobem: přímky **nejsou** rovnoběžné:

rovnost $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **neplatí**. Navíc mají obě

přímky **společný bod**, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Příklad (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

- 3 Přímky $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ jsou **mimoběžné**.

To zjistíme následujícím způsobem: přímky **nejsou** rovnoběžné: rovnost $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **neplatí**. Navíc obě přímky **nemají společný bod**: neexistují reálná čísla s, t tak, že

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O tom se lze snadno přesvědčit řešením příslušné soustavy rovnic.

Jak postupovat v $\mathbb{R}^n$?

Potřebujeme **dobré definice** a **dobrá kritéria** vzájemné polohy!

Definice (vzájemná poloha afinních podprostorů)

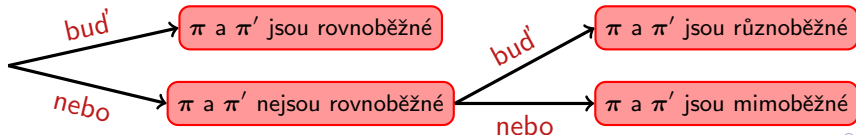
Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že

- ① π a π' jsou **rovnoběžné**, pokud platí $W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$.
- ② π a π' jsou **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod.
- ③ π a π' jsou **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Dimensi lineárního podprostoru $W \cap W'$ budeme říkat **stupeň rovnoběžnosti** afinních podprostorů π a π' .

Poznámka

Pro dva afinní podprostory π a π' prostoru $\mathbb{R}^n$ platí:



Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Ať $W' \subseteq W$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory π a π' jsou **disjunktní**.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W .
3. **Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve W .**
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W .

Důkaz.

Bez důkazu. Pro zájemce: Tvrzení 7.2.4 **skript**.



Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 Afinní podprostory π a π' jsou různoběžné.
- 2 Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.
- 3 Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ leží ve $W \vee W'$.
- 4 Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Bez důkazu. Pro zájemce: Tvrzení 7.2.5 skript.



Tvrzení (charakterisace **mimoběžných** afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory π a π' jsou **mimoběžné**.
2. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Bez důkazu. Pro zájemce: Tvrzení 7.2.6 **skript**. ■

Popis afinního podprostoru v $\mathbb{R}^n$ pomocí směrové matice

Pro afinní podprostor $\pi = \mathbf{p} + W$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ dimenze d je možné nalézt matici $\mathbf{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ tak, že

$$\text{im}(\mathbf{S}) = W \quad \text{def}(\mathbf{S}) = 0$$

Stačí definovat $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$, kde sloupce $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ matice $\mathbf{S}$ tvoří bázi W .

Každý bod v prostoru π je tedy tvaru

$$\mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$$

pro jednoznačně určený vektor $\mathbf{t}$ z $\mathbb{R}^d$.

Tomuto popisu říkáme **parametrický zápis** afinního podprostoru π a matici $\mathbf{S}$ říkáme **směrová matice** afinního podprostoru π .

Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$.

① Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- ① Platí $W' \subseteq W$.
- ② Platí $\text{span}(\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'}) \subseteq \text{span}(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$, kde $\mathbf{S}' = (\mathbf{s}'_1, \dots, \mathbf{s}'_{d'})$ a $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$.
- ③ Simultánní soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{S}')$ má řešení.

② Ať $W' \subseteq W$. Následující podmínky ekvivalentní:

- ① Afinní podprostory π a π' jsou **disjunktní**.
- ② Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.
- ③ **Soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.**
- ④ Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.

Důkaz.

Přednáška.

Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

At' $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. At' π a π' zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- 1 Afinní podprostory π a π' jsou různoběžné.
- 2 Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' soustava $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.
- 3 Soustava $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ má řešení.
- 4 Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že soustava $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.

Důkaz.

Přednáška.



Tvrzení (charakterisace **mimoběžných** afinních podprostorů)

At' $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. At' π a π' zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

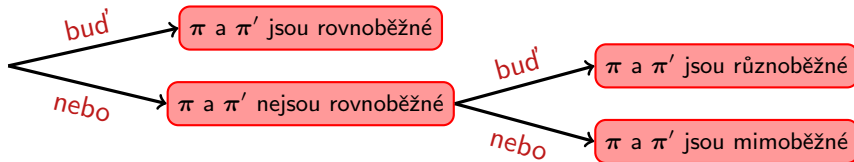
1. Afinní podprostory π a π' jsou **mimoběžné**.
2. Soustava $(\mathbf{S}', \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.

Důkaz.

Přednáška. 

Důležitá poznámka

Při rozhodování o vzájemné poloze afinních podprostorů π a π' je velmi rozumné postupovat podle obrázku



Povšimněte si, že tak tomu bude ve všech následujících příkladech.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$)

V $\mathbb{R}^5$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

❶ Rovnoběžnost: ani jedna ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nemá řešení. Takže π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$, pokrač.)

- ① Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava^a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

má řešení. Protože řešení neexistuje, jsou π a π' **mimoběžné**.

Závěr: roviny π a π' jsou **mimoběžné**.

^aPravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a

$$\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- ❶ Rovnoběžnost: obě simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

mají zjevně řešení; π a π' jsou **rovnoběžné**.

- ❷ Jsou π a π' disjunktní? Stačí zjistit, zda soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení. Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

Soustava

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

evidentně řešení nemá; přímky π a π' jsou **disjunktní**.

Závěr: přímky π a π' jsou **rovnoběžné a disjunktní**.

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a

$$\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

- ① Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

řešení nemá; přímky π a π' **nejsou rovnoběžné**.

- ② Různoběžnost: protože soustava^a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení, jsou přímky π a π' **různoběžné**.

Závěr: přímky π a π' jsou **různoběžné**.

^aPravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a

$$\pi' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

❶ Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

řešení nemá; přímky π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

② Různoběžnost: soustava^a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

nemá řešení, přímky π a π' jsou **mimoběžné**.

Závěr: přímky π a π' jsou **mimoběžné**.

^aPravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$)

V $\mathbb{R}^4$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

❶ Rovnoběžnost: řešíme simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Roviny budou rovnoběžné, pokud alespoň jedna simultánní soustava má řešení.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

❶ Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

Simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

tedy řešení nemá.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

❶ Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_4 \\ R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Ani simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

tedy řešení nemá.

Ukázali jsme, že π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

- ② Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava^a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

má řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 3R_4 - R_3 \end{matrix}$$

Řešení existuje, π a π' jsou různoběžné.

Závěr: roviny π a π' jsou různoběžné.

^aPravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Závěrečná poznámka

Tvrzení o rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti, existenci parametrického zápisu a rovnicového zápisu lze **stejným způsobem** dokázat v prostoru $\mathbb{F}^n$, kde $\mathbb{F}$ je **jakékoli těleso**.^a

^aTo znamená: **rozumíme** například pojmům rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti afinních podprostorů prostoru $\mathbb{C}^6$ nad $\mathbb{C}$. Nebo například v prostoru $(\mathbb{Z}_{7919})^{12\,378\,516}$ nad $\mathbb{Z}_{7919}$.

Co příště a přes příště?

- 1 Zavedeme **vektorový součin** v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.
- 2 Naučíme se počítat **vzájemné vzdálenosti** afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

Budeme pracovat^a v $\mathbb{R}^n$ se **standardním skalárním součinem**.

^aJde pracovat i v $\mathbb{R}^n$ s obecným metrickým tensorem $\mathbf{G}$. To nebudeme dělat.

Vektorový součin

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.1 a B.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se **standardním** skalárním součinem.

- 1 Naučíme se spočítat **objem k -rovnoběžnostěnu** pro $k \leq n$.^a
- 2 V $\mathbb{R}^n$, pro $n \geq 2$, zavedeme **vektorový součin** libovolného seznamu vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. Dokážeme některé vlastnosti vektorového součinu. Tím si připravíme půdu pro příští přednášku.

^aPřipomeňme, že umíme spočítat (dokonce orientovaný) objem n -rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$.

Příští přednáška

Budeme pracovat v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ se **standardním** skalárním součinem, a tím pádem se **standardním** pojmem vzdálenosti.

Výsledky dnešní (a minulé) přednášky využijeme ke stanovení **vzdálenosti dvou afinních podprostorů** prostoru $\mathbb{R}^n$.

Problém

V $\mathbb{R}^n$ je zadán seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$. Jak nalézt k -dimensionální neorientovaný objem

$$V_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$$

rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$?

Řešení

Označme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

- ① Jestliže $k = n$, potom

$$V_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{absolutní hodnota } \det(\mathbf{A})$$

- ② Jestliže $k < n$, potom $\det(\mathbf{A})$ není definován, protože matice $\mathbf{A}$ není čtvercová!

Matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ale čtvercová je (má rozměry $k \times k$). Uvidíme, že platí

$$V_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

Definice (Gramova matice a Gramův determinant)

Ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$.

- 1 Matici $\mathbf{A}^T \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ budeme říkat **Gramova matice** seznamu vektorů $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.
- 2 Determinantu $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ budeme říkat **Gramův determinant** seznamu $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ a značit jej $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Pozorování

V j -tém sloupci a i -tém řádku matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je hodnota **standardního** skalárního součinu $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$.

Tento jednoduchý fakt umožní dát Gramově determinantu $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ jasný **geometrický význam**.

Tvrzení (význam Gramova determinantu)

Ať $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ je seznam vektorů v $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Potom platí:

- 1 Gram $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \geq 0$.
- 2 Gram $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) > 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé.
- 3 Hodnota^a $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}$ udává **k -dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$** , určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

^aSlogan: Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je „druhá mocnina“ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Proto je $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ „druhá mocnina“ „determinantu“ $\mathbf{A}$. Absolutní hodnota „determinantu“ $\mathbf{A}$ je tudíž $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}$. Jde ale pouze o slogan, který slouží k zapamatování; matice $\mathbf{A}$ obecně není čtvercová, proto o determinantu matice $\mathbf{A}$ obecně nemůžeme mluvit!

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz není těžký, ale je zdlouhavý, viz Tvrzení B.1.3 skript.



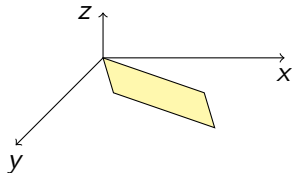
Příklad

Určete 2-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$, určeného vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 16$$

Hledaný 2-dimensionální objem je $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = 4$.



Příklad

Určete 3-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^4$, určeného

vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 72$$

Hledaný 3-dimensionální objem je

$$\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \sqrt{72} \approx 8.485$$

Připomenutí známých faktů a definice vektorového součinu

- ① Pro libovolný seznam $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ vektorů z $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, je zobrazení

$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x})$
lineární. To je **vlastnost determinantu**.

- ② Pro **každé** lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje **jediný** vektor $\mathbf{a}$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$

Jednoduché: $\mathbf{f}$ „je“ **matice** s 1 řádkem a n sloupci, označme ji $\mathbf{a}^T$, pro $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$.

- ③ To znamená, že **pro zadaný seznam** $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ existuje **jednoznačně** určený vektor $\mathbf{a}$ z $\mathbb{R}^n$ tak, že platí

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$

pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.

Místo $\mathbf{a}$ budeme psát $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ a budeme mu říkat **vektorový součin** seznamu $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Přepis definice vektorového součinu seznamu $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ $\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.**Základní vlastnost vektorového součinu seznamu** $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ Pro jakékoli $j = 1, \dots, n-1$ platí

$$\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mid \mathbf{v}_j \rangle = 0$$

tj. vektor $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ je **kolmý** na všechny vektory $\mathbf{v}_j$,
 $j = 1, \dots, n-1$.

To je snadné:

$$\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mid \mathbf{v}_j \rangle = \underbrace{\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_j)}_{\text{determinant se dvěma shodnými sloupci}} = 0$$

Tvrzení (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

Platí rovnost $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$.

Důkaz.

Platí $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) | \mathbf{e}_i \rangle}_{=i\text{-tá souřadnice vektoru } \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})} \cdot \mathbf{e}_i$,

protože $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je **ortonormální báze** pro standardní skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^n$. Ale

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) | \mathbf{e}_i \rangle}_{=\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{e}_i)} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$$

podle definice vektorového součinu. ■

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^2$

$$\times(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 \det(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = \det(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{v}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} v_1 & 1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-v_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=v_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

a to je **známý** výpočet vektoru, kolmého na vektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Například } \times\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ (je zvykem psát $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ místo $\times(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$)

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3$$

Takže

$$\begin{aligned} \times \left(\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} \right) &= \underbrace{\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 1 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{=\det \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 1 \\ v_{31} & v_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{=-\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{31} & v_{32} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \underbrace{\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{=\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{21} v_{32} - v_{31} v_{22} \\ v_{31} v_{12} - v_{11} v_{32} \\ v_{11} v_{22} - v_{21} v_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a to je **nezapamatovatelné**.

Mnemotechnická pomůcka (nejde o definici vektorového součinu)

$$\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \dots & v_{n-2,n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

Jde o ryze formální^a zápis, ale užitečný. Například

$$\times\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} v_1 & \mathbf{e}_1 \\ v_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \mathbf{e}_1 \\ v_{21} & v_{22} & \mathbf{e}_2 \\ v_{31} & v_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

a tak dále. A takové vzorce se již zapamatovat dají.

^aNapravo od rovnítka totiž **mezi značkami pro determinant není zapsána matice**. Počítejte ale, jako by to determinant byl. Viz následující příklady.

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & 4 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_3 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot \mathbf{e}_1 \\
 &\quad - 2 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 - (-1) \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_3 - 4 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 3 \\
 &= \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Příklad (výpočet vektorového součinu v $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{aligned}
 \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tvrzení (další vlastnosti vektorového součinu v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

- ❶ Funkce $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mapsto \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ je lineární v každé položce.
- ❷ $\times(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$, pro $\pi \in S_{n-1}$.
- ❸ $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$, pro $\pi \in S_n$.
- ❹ $\|\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})\|^2 = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}))$.
- ❺ $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \mathbf{0}$ platí právě tehdy, když vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ jsou lineárně závislé.
- ❻ $\|\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})}$. To jest: norma $\|\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})\|$ je rovna $(n-1)$ -dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.

Poznámky k důkazu na přednášce. Všechny vlastnosti plynou **okamžitě** z vlastností determinantu a z **definice** vektorového součinu.

Metrické výpočty v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.3 a B.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

- 1 Víme, co je **afinní podprostor** dimense d v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Připomenutí: jde o množinu $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor dimense d v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je vektor v $\mathbb{R}^n$.

- 2 Pro dva afinní podprostory $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v $\mathbb{R}^n$ umíme rozhodnout, zda jsou **rovnoběžné**, nebo **různoběžné**, nebo **mimoběžné**.

- 3 Víme, co je **vektorový součin**^a $\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ seznamu vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.

Připomenutí:

- 1 Rovnost $\langle \times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x})$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$.
- 2 Platí rovnost $\|\times(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})}$.

^aProstor $\mathbb{R}^n$ je vybaven **standardním** skalárním součinem $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$.

Dnešní přednáška

Pro dva afinní podprostory π , π' prostoru $\mathbb{R}^n$ se **standardním^a** skalárním součinem spočteme jejich **vzájemnou vzdálenost**.

Připomenutí:

① $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ je **standardní** skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

② $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}}$ je **norma** v $\mathbb{R}^n$, vytvořená

standardním skalárním součinem a pro $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ **standardní eukleidovská vzdálenost** vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ z prostoru $\mathbb{R}^n$.

^aVše lze zobecnit pro **obecný** metrický tensor $\mathbf{G}$ v $\mathbb{R}^n$. To dělat nebudeme.

Příklad (dva různé zápisy jedné přímky)

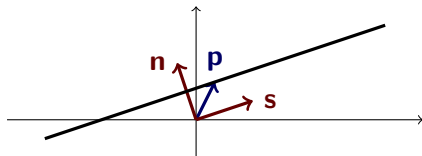
Dva zápisy téže přímky v $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}}_{\text{parametrický zápis}}$$

$$\underbrace{-x + 3y = 5}_{\text{rovnicevý zápis}}$$

Oba typy zápisu jsme již potkali při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad (-1 \ 3 \mid 5)$$



Získáváme informace o **směrovém vektoru** a **normálovém vektoru**.^a

^aPřipomenutí: v $\mathbb{R}^2$ je **standardní** skalární součin.

Tvrzení (Existence parametrického a normálového zápisu)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ je d -dimensionální afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom existují dvě matice^a $\mathbf{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{N}^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ tak, že platí:

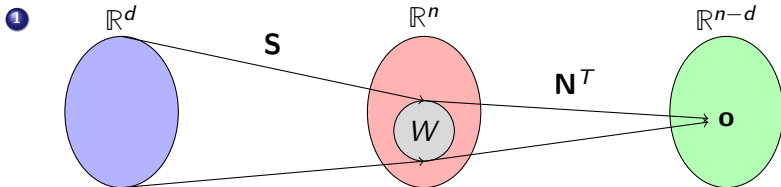
- 1 Platí $\text{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$, $\text{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$ a $\text{rank}(\mathbf{S}) = d$, tj. $\mathbf{S}$ je monomorfismus a $\mathbf{N}^T$ je epimorfismus.
- 2 Vektor $\mathbf{x}$ leží v π právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ pro jednoznačně určené $\mathbf{t}$.
- 3 Vektor $\mathbf{x}$ leží v π právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

^a**Terminologie:** $\mathbf{S}$ je **směrová matice** a $\mathbf{N}$ je **normálová matice** lineárního podprostoru W . Zápisu $\mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ říkáme **parametrický zápis**, zápisu $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ **normálový zápis** afinního prostoru π .

Důkaz.

Přednáška.

Poznámky



$$\text{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$$

Pozor: musí platit rovnosti $\text{def}(\mathbf{S}) = 0$ a $\text{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$.

2 **Proč** píšeme normálový zápis ve tvaru $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$?

- 1 Ihned vidíme, že afinní podprostor **prochází** bodem $\mathbf{p}$.
- 2 Označme $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-d})$. Pak rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ je ekvivalentní rovnostem^a $\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{n}_2 | \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$, $\dots$, $\langle \mathbf{n}_{n-d} | \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$. Tudíž: sloupce matice $\mathbf{N}$ tvoří **seznam lineárně nezávislých „normál“** příslušného afinního podprostoru.

^aPřipomenutí: $\mathbb{R}^n$ je vybaven **standardním** skalárním součinem.

Ortogonalní doplněk lineárního podprostoru

Ať W je lineární podprostor dimenze d prostoru $\mathbb{R}^n$ se **standardním**^a skalárním součinem $\langle - | - \rangle$. Označme jako $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d)$ a $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-d})$ směrovou, resp. normálovou matici podprostoru W .

Potom platí

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow[\text{mono}]{\mathbf{S}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{epi}]{\mathbf{N}^T} & \mathbb{R}^{n-d} \\ \mathbb{R}^d & \xleftarrow[\text{epi}]{\mathbf{S}^T} & \mathbb{R}^n & \xleftarrow[\text{mono}]{\mathbf{N}} & \mathbb{R}^{n-d} \end{array}$$

kde $\text{im}(\mathbf{N}) = \ker(\mathbf{S}^T)$. Této společné hodnotě říkáme **ortogonalní doplněk** podprostoru W a značíme $W^\perp$.

^aAnalogické úvahy lze provést pro $\mathbb{R}^n$ s obecným metrickým tensorem $\mathbf{G}$.

Jednoduché a užitečné rovnosti

Pro lineární podprostor W a pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí rovnosti

$$\|\text{rej}_W(\mathbf{x})\| = \|\text{proj}_{W^\perp}(\mathbf{x})\| \quad \|\text{proj}_W(\mathbf{x})\| = \|\text{rej}_{W^\perp}(\mathbf{x})\|$$

Definice

Ať π a π' jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu^a

$$\omega(\pi, \pi') = \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \pi, \mathbf{x}' \in \pi' \right\}$$

říkáme **vzájemná vzdálenost** π a π' .

^aZ definice vzájemné vzdálenosti ihned plyne, že $\omega(\pi, \pi') = \omega(\pi', \pi)$.

Poznámky k definici

- ① Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ není definice příliš zajímavá.
 - ① $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{o}\}$, proto pro jakákoli π a π' platí $\omega(\pi, \pi') = 0$.
 - ② Prostor $\mathbb{R}^1$ má jako afinní podprostory buď body nebo celé $\mathbb{R}^1$.
To znamená $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}'\|$, nebo $\omega(\mathbf{p}, \mathbb{R}) = \omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 0$.
- ② V obecném $\mathbb{R}^n$ víme: $\left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \mid \mathbf{x} \in \pi, \mathbf{x}' \in \pi' \right\}$ je **neprázdná** a **zdola omezená** množina reálných čísel. Tudíž její **infimum existuje** a reálné číslo $\omega(\pi, \pi')$ je korektně definováno.

Problém: jak spočítat hodnotu $\omega(\pi, \pi')$ v obecném $\mathbb{R}^n$?

Věta (výpočet vzáj. vzdálenosti dvou afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom platí:^a

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\text{proj}_{(W \vee W')^\perp}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

^aProtože $\omega(\pi, \pi') = \omega(\pi', \pi)$, je také $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$.

Hlavní myšlenky důkazu (u zkoušky budou požadovány pouze tyto myšlenky)

- 1 Vzdálenost π a π' by měla být **délka kolmé příčky** prostorů π a π' .
Tak je tomu v $\mathbb{R}^2$ při výpočtu vzdálenosti dvou rovnoběžek.
Obecný případ by měl dopadnout analogicky.
- 2 Obecně: kolmá příčka k π, π' má **směr** $V = (W \vee W')^\perp$.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

- ③ Najdeme^a body $\mathbf{x}_0$ v π a $\mathbf{x}'_0$ v π' tak, že platí rovnost^b
 $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 = \operatorname{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

To znamená, že $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 \in V$, proto $\mathbf{x}_0 + V = \mathbf{x}'_0 + V$ je
hledaná kolmá příčka π , π' , procházející body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}'_0$.

^aTo je mírně technické (nikoli těžké): viz důkaz Věty B.3.3 **skript**.

^bPodle definice V platí také $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0 = \operatorname{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Toho v dalších výpočtech několikrát využijeme.

Hlavní myšlenky důkazu (pokrač.)

- ⑤ Pro jakékoli $\mathbf{x}$ v π a jakékoli $\mathbf{x}'$ v π' platí

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

Proto podle **Pythagorovy věty**^a platí

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$$

a tedy $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2$, neboli

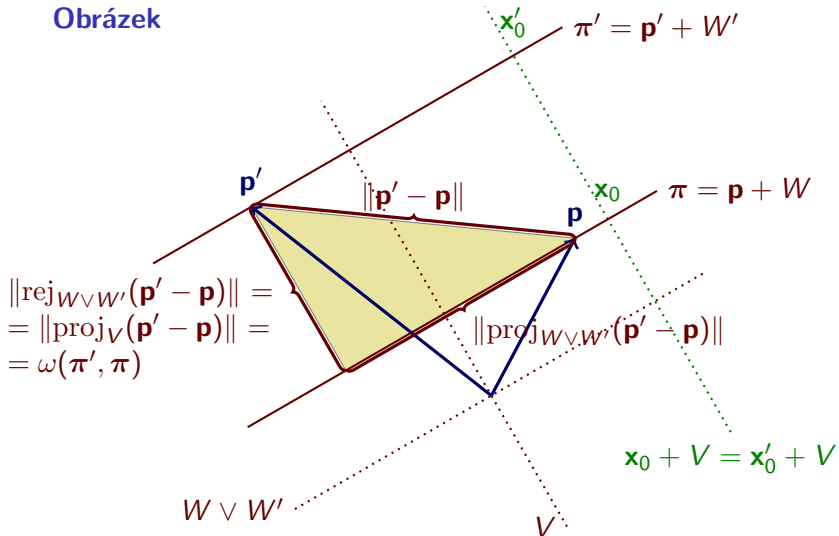
$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

To znamená, že platí^b $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. ■

^aZ definice V platí $\langle \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rangle = 0$.

^bPodle definice V platí také $\omega(\pi, \pi') = \|\text{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$.

Obrázek



Poznámky

- ① Vzorec $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ platí v $\mathbb{R}^n$ s **libovolným** skalárním součinem $\langle - | - \rangle$, který vytváří normu $\| - \|$.

Důkaz hlavní věty totiž **nikde** nevyužívá, že skalární součin $\langle - | - \rangle$ je standardní.

Jediné, co důkaz vyžaduje, je pojem **ortogonální rejekce** a platnost **Pythagorovy věty**.^a

- ② V dalším se omezíme na **standardní** skalární součin v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Tam jsou příslušné vzorce pro vzájemnou vzdálenost dvou afinních podprostorů poměrně snadno pochopitelné.

^aPřipomenutí: **ortogonální projekce** umíme počítat pro **libovolný** skalární součin v $\mathbb{R}^n$, vzorce jsou však poněkud barokní. Takže, pro **libovolný** skalární součin v $\mathbb{R}^n$, umíme počítat (barokním způsobem) i **ortogonální rejekce**. **Pythagorova věta** platí pro **libovolný** skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

Důležité upozornění

Ve zbytku přednášky odvodíme celou řadu vzorců pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ se standardními skalárními součiny. Tyto vzorce **nebudou** zkoušeny stylem: *Napište vzorec pro vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^3$, atd.*

Bude vyžadováno:

- 1 **Znát obecný vzorec** $\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$ pro vzájemnou vzdálenost afinních podprostorů $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ a **znát hlavní myšlenky jeho odvození** z předchozích stran.

- 2 Z přednášky o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích **znát vzorec**

$$\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v}$$

pro **nenulový** vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^n$. Viz následující stranu.

- 3 **Tvůrčí uplatnění** výše uvedeného vzorce v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

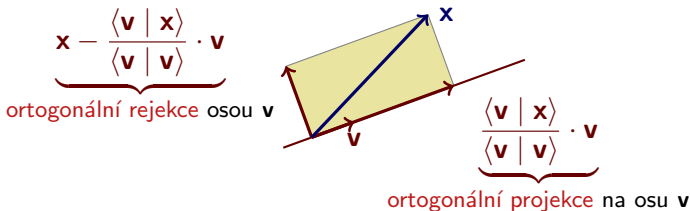
Připomenutí (přednáška o ortogonálních projekcích a ortogonálních rejekcích)

V $\mathbb{R}^n$ pro **nenulový** vektor $\mathbf{v}$ platí

$$\|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \right| \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|^2} \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{|\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$$

a tudíž

$$\|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x} - \text{proj}_{\text{span}(\mathbf{v})}(\mathbf{x})\| = \left\| \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \cdot \mathbf{v} \right\|$$



Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$

❶ Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$. V tomto případě je^a

❶ $W \vee W' = \text{span}(\mathbf{s})$.

❷ $\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \left\| (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s} \right\|$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\pi = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \text{span}(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{s}})$ je tedy $\omega(\mathbf{p}', \pi)$ rovno

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \dots = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

^aTento vzorec není příliš „hezký“. **Lepší postup:** definujte $\mathbf{n} = \times(\mathbf{s})$ a pracujte s přímkou π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. Viz další příklad.

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$ (pokrač.)

- ② Vzdálenost $\mathbf{p}'$ od π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$. V tomto případě je

① $V = \text{span}(\mathbf{n})$.

- ② Neznáme směr $\mathbf{s}$ zadané přímky, ale platí $\omega(\mathbf{p}', \pi) =$

$$\begin{aligned} \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| &= \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\langle \mathbf{n} | \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} \\ &= \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T \mathbf{p}' - \mathbf{n}^T \mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|} \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a přímku π zadanou rovnicí^a $\underbrace{-6x + 3y}_{=\mathbf{n}^T \mathbf{x}} = \underbrace{-18}_{=\mathbf{n}^T \mathbf{p}}$

je tedy $\omega(\mathbf{p}', \pi)$ rovno

$$\frac{|-6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 18|}{\sqrt{45}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

^a Jde o **stejnou** přímku, jako v minulém příkladu.

Vzdálenost dvou přímek v $\mathbb{R}^2$

Jsou zadány přímky $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$ a $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$.

- 1 $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') =$
$$\left\{ \begin{array}{ll} = \text{span}(\mathbf{s}), & \text{j sou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně závislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \pi \text{ a } \pi' \text{ rovnoběžné} \\ = \mathbb{R}^2, & \text{j sou-li } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{s}' \text{ lineárně nezávislé,} \\ & \text{tj. jsou-li } \pi \text{ a } \pi' \text{ různoběžné} \end{array} \right.$$
- 2 Pokud $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') = \text{span}(\mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \omega(\mathbf{p}', \pi)$$

Vzdálenost bodu od přímky již umíme počítat.

- 3 Pokud $\text{span}(\mathbf{s}) \vee \text{span}(\mathbf{s}') = \mathbb{R}^2$, je

$$\omega(\pi, \pi') = \|\text{rej}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

Vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^3$

Je dán bod $\mathbf{p}'$ a přímka $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$. Potom

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{p}', \pi) &= \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| \\ &= \left\| (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle}{\langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle} \cdot \mathbf{s} \right\|\end{aligned}$$

což je **formálně stejný** vzorec jako v $\mathbb{R}^2$.

Je-li přímka π zadána rovnicově jako $\mathbf{N}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$, kde $\text{rank}(\mathbf{N}) = 2$, pak $V = \text{im}(\mathbf{N})$. Proto

$$\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\text{proj}_{\text{im}(\mathbf{N})}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\mathbf{N}(\mathbf{N}^T\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

Leckdy je **lepší postup** je vyřešit soustavu $\mathbf{N}^T\mathbf{x} = \mathbf{N}^T\mathbf{p}$, získat tak π v parametrickém tvaru a použít výše uvedený vzorec.

Vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{R}^3$

Pro vzdálenost bodu $\mathbf{p}'$ od roviny π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ platí

$$\omega(\mathbf{p}', \pi) = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{n})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \frac{|\mathbf{n}^T(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}^T \mathbf{p}' - \mathbf{n}^T \mathbf{p}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

kde jsme využili toho, že $\mathbf{n}$ je **normála** roviny π .

Získáváme tak **formálně stejný** vzorec jako pro vzdálenost bodu od přímky v $\mathbb{R}^2$.

Je-li rovina π zadána jako $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je **vhodné** spočítat^a

$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$ a **použít předchozí postup** pro rovinu π ve tvaru $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$.

^aPřipomenutí mnemotechniky: $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \mathbf{e}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \mathbf{e}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$.

Vzdálenost přímky od roviny v $\mathbb{R}^3$

Ať $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$ je přímka a $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ je rovina.

Platí

$$\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{pokud } \mathbf{s}', \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \text{ jsou lineárně} \\ & \text{nezávislé,} \\ & \text{tj., pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou různoběžné,} \\ \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), & \text{pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

- ① Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbb{R}^3$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathbf{o}\| = 0$$

- ② Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

$$= \frac{|\langle \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}\right)$ a

$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Protože $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & 1 \\ 14 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, jsou

π a π' **rovnoběžné**.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}} = \frac{|\det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 56 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}} = \frac{118}{\sqrt{684}} \approx 4.51$$

Vzdálenost přímky od přímky v $\mathbb{R}^3$

Ať $\pi' = \mathbf{p}' + \text{span}(\mathbf{s}')$ a $\pi = \mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{s})$ jsou přímky.

Platí

$$\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \begin{cases} \text{span}(\mathbf{s}), & \text{pokud } \mathbf{s}' \text{ a } \mathbf{s} \text{ jsou lineárně závislé} \\ & \text{tj., pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ jsou rovnoběžné,} \\ \text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s}), & \text{pokud } \pi' \text{ a } \pi \text{ nejsou rovnoběžné.} \end{cases}$$

- ① Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \text{span}(\mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \omega(\mathbf{p}', \pi)$$

a vzdálenost bodu od přímky už umíme počítat.

- ② Je-li $\text{span}(\mathbf{s}') \vee \text{span}(\mathbf{s}) = \text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})$, je

$$\omega(\pi', \pi) = \|\text{rej}_{\text{span}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\text{proj}_{\text{span}(\mathbf{s}' \times \mathbf{s})}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\|$$

$$= \frac{|\langle \mathbf{s}' \times \mathbf{s} \mid \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rangle|}{\|\mathbf{s}' \times \mathbf{s}\|} = \frac{|\det(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \mathbf{p}' - \mathbf{p})|}{\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{s}', \mathbf{s})}}$$

Příklad

Najdeme vzájemnou vzdálenost $\pi' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a

$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Přímký π a π' zjevně **nejsou**
rovnoběžné.

Platí

$$\omega(\pi, \pi') = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\text{Gram}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.183$$