

str 42 1. Určete definiční obor funkce:

a) $\frac{x^2}{x+1}$;

b) $\frac{x+2}{x^2-x-6}$;

c) $\sqrt{2+x-x^2}$;

d) $\sqrt{3x-x^3}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

f) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x}$;

g) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

h) $\sqrt{1-|x|}$;

i) $\log_2 \log_3 \log_4 x$;

j) $\frac{\ln(x+1)}{2x-1}$;

k) $\ln |\sin x|$;

l) $\arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$;

59 3. Spočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3+3}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-1}{x^4+1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-2x+1}{2x^2+3x-1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-2x+5}{x^3+x^2+1}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+2x}{x^2+1}$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^2+x+3}$;

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5+x^3+2}{2x^3-1}$;

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^5}{1+x^2}$.

4. Spočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x-2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2-x-2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x^2-4x+3}$;

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2+2x+1}$;

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$.

5. Spočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}+2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4}-2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2-2}+1}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{x}$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$;

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2}+x)$;

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2}-x)$.

6. Spočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\pi/2} \frac{\cos 2x}{1-\sin x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \cos x)$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x \sin x}{x+1}$;

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - \sin x)$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \cos x$;

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \cos(3x+1)$.

7. Spočtěte:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^2+3x-5}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \ln^2(1+\cos x)$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$;

i) $\lim_{x \rightarrow 2} x^{-2} \sqrt{x}$.

71 2. Spočítejte derivaci funkce:

a) $\sqrt[4]{x} \cos x$;

b) $e^x \sin x$;

c) $x^2 e^x \cos x$;

d) $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$;

e) $\frac{e^x}{\sin x}$;

f) $\cot g x$.

72 3. Spočítejte derivaci funkce

a) $\sin(2x + 5)$;

b) e^{-3x+1} ;

c) 10^x ;

d) $\ln^2 x$;

e) $\ln \operatorname{tg} x$;

f) $\arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

g) $\sqrt{\ln^2 x + 1}$;

h) $\ln \cosh x$;

i) $\ln \ln \sin x$.

4. Spočítejte derivaci funkce:

a) x^x ;

b) $x^{\sin x}$;

c) x^{x^2} ;

d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

e) $(x^2 + 1)^{\cos \pi x}$.

6. Vyjádřete derivaci řádu n ;

a) e^{ax} ;

b) $x e^x$;

c) $x \ln x$.

85 1. Spočítejte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{x-1}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh 2x}{3x-2}$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x+3}$;

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}$;

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

2. Spočítejte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{e^x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}$.

3. Spočítejte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot g x$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x \quad (a > 0)$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Spočítejte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

86 7. Určete Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a :

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $a = 0$, $n = 3$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 0$, $n = 3$;

c) $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $n = 4$;

d) $f(x) = \sqrt[k]{1+x}$ ($k \in \mathbb{N}$), $a = 0$, $n = 1$;

e) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$;

f) $f(x) = x^2 e^{x+1}$, $a = -1$, $n = 3$.

97 2. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémů funkce:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$;

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

98

d) $f(x) = x^2 e^x$;

e) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;

f) $f(x) = x \ln x$;

g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

h) $f(x) = x - \sin x$;

i) $f(x) = e^{-|x|}$;

j) $f(x) = x^3 e^{-|x|}$;

k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$;

l) $f(x) = (x-1)|x+3|$;

m) $f(x) = |(x-2)^3 + 1|$.

3. Určete maximum a minimum funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$;

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $x \in \langle -2, 1 \rangle$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $x \in \langle -1, 3 \rangle$;

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \langle -2, 3 \rangle$;

e) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, +\infty \rangle$;

f) $f(x) = x \ln^2 x$, $x \in (0, 1)$;

g) $f(x) = x + e^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

h) $f(x) = x e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$;

i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x \in (-1, 1)$;

j) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

98 5. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$;

b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$;

c) $x^4 + x^2 + e^x$;

d) $x e^x$;

e) $(x^2 + 1) e^x$;

f) $x + \sin x$;

g) $\frac{x}{x^2+1}$;

h) $\frac{|x-1|}{x^2}$;

i) $\sqrt[3]{x+3}$;

j) $(\operatorname{sign} x + 1) \cdot x^2$.

6. Určete asymptoty grafu funkce:

a) $\frac{2x+1}{3x-1}$;

b) $\frac{x+1}{x^2+3x+2}$;

c) $\frac{x^2-2x}{x+1}$;

d) $\frac{x^3+1}{x-1}$;

e) $x + e^{-x}$;

f) $x \ln x$;

g) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$;

h) $\ln \frac{1-x}{1+x}$;

i) $e^x \cos x$;

109

4. Spočítejte (využijte metodu per partes):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (x-2) \sin 2x \, dx; & \text{b)} \int (x+1) \cos \frac{x}{3} \, dx; & \text{c)} \int (3x-1) e^{3x} \, dx; \\ \text{d)} \int (x+\sqrt{x}) \ln x \, dx; & \text{e)} \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx. & \end{array}$$

5. Spočítejte (využijte metodu per partes opakovaně):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (x^2-x) \sin \frac{x}{2} \, dx; & \text{b)} \int (2x^2+3) \cos 2x \, dx; & \text{c)} \int (x^2+x+1) e^{-x} \, dx; \\ \text{d)} \int \ln^2 x \, dx; & \text{e)} \int x \ln^3 x \, dx. & \end{array}$$

6. Spočítejte (využijte metodu per partes a řešte rovnici):

$$\text{a)} \int e^{2x} \cos \frac{x}{3} \, dx; \quad \text{b)} \int e^{-x} \sin 2x \, dx; \quad \text{c)} \int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

7. Spočítejte pomocí vhodné substituce:

$$\text{a)} \int \frac{x+1}{x^2+2x+4} \, dx; \quad \text{b)} \int \frac{2x^2}{x^3-1} \, dx; \quad \text{c)} \int \cotg 2x \, dx.$$

8. Spočítejte pomocí vhodné substituce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int 2x(x^2-1)^4 \, dx; & \text{b)} \int x e^{x^2+1} \, dx; & \text{c)} \int x \sqrt{1-x^2} \, dx; \\ \text{d)} \int 6x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx; & \text{e)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} \, dx; & \text{f)} \int \frac{4x+4}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}} \, dx; \\ \text{g)} \int \sin^7 x \cdot \cos x \, dx; & \text{h)} \int \sin x \cdot \cos^4 x \, dx; & \text{i)} \int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx. \end{array}$$

110

9. Spočítejte (využijte nejprve metodu per partes a pak vhodnou substituci):

$$\text{a)} \int \operatorname{arccotg} x \, dx; \quad \text{b)} \int \arcsin x \, dx; \quad \text{c)} \int \arccos x \, dx.$$

142

2. Spočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^2 |x-1| \, dx; & \text{b)} \int_{-2}^3 |x^2-1| \, dx; & \text{c)} \int_2^4 e^{|2x-6|} \, dx; \\ \text{d)} \int_0^{3\pi} |\sin x| \, dx; & \text{e)} \int_{-1}^4 (x-1) \operatorname{sign} x \, dx. & \end{array}$$

3. Spočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^\pi (2x+1) \sin \frac{x}{2} \, dx; & \text{b)} \int_0^\pi (4x-1) \cos 2x \, dx; & \text{c)} \int_{-1}^0 (3x+2) e^{3x} \, dx; \\ \text{d)} \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx; & \text{e)} \int_{-1}^0 x^3 e^{-x} \, dx; & \text{f)} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx; \\ \text{g)} \int_0^1 \arcsin x \, dx. & & \end{array}$$

126

2. Spočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{x+3}{x^2+2x+10} dx; & \text{b)} \int \frac{5x-2}{x^2-2x+5} dx; & \text{c)} \int \frac{3x+4}{x^2+4x+13} dx; \\ \text{d)} \int \frac{x}{x^2-6x+13} dx; & \text{e)} \int \frac{dx}{4x^2-12x+13}; & \text{f)} \int \frac{dx}{x(x^2+1)}; \\ \text{g)} \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}; & \text{h)} \int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx. \end{array}$$

3. Spočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{3e^{2x}}{e^{4x}+e^{2x}-2} dx; & \text{b)} \int \frac{2}{e^{3x}+2} dx; & \text{c)} \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-2e^{2x}+2} dx; \\ \text{d)} \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; & \text{e)} \int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x-4)} dx; & \text{f)} \int \frac{dx}{x \ln x}. \end{array}$$

4. Spočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx; & \text{b)} \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx; \\ \text{c)} \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin x + 1} dx; & \text{d)} \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx; \\ \text{e)} \int \operatorname{tg}^4 x dx; & \text{f)} \int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx; \\ \text{g)} \int \operatorname{cotg}^2 x dx; & \text{h)} \int \frac{dx}{1 - \cos x}. \end{array}$$

5. Spočítejte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x \sqrt[3]{x-1} dx; & \text{b)} \int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} dx; & \text{c)} \int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}; \\ \text{d)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}; & \text{e)} \int \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx; & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \end{array}$$

143 4. Spočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx; & \text{b)} \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx; \\ \text{c)} \int_{-2}^3 \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12} dx; & \text{d)} \int_3^4 \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx; \\ \text{e)} \int_3^5 \frac{x-2}{x^2-6x+13} dx; & \text{f)} \int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}. \end{array}$$

5. Spočítejte:

$$\text{a)} \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx; \quad \text{b)} \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx; \quad \text{c)} \int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{x}{3} dx.$$

6. Spočítejte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx; & \text{b)} \int_0^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}; \\ \text{c)} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x dx; & \text{d)} \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2 \cos x + 2} dx; \\ \text{e)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx; & \text{f)} \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} dx. \end{array}$$

3.38. Úlohy. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{4k+1}}$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^{k+1}}$; c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k}$;
 d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$; e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3^k} + \frac{1}{5^{k+1}} \right)$; f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$.

[a) diverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) diverguje; e) konverguje; f) konverguje.]

3.39. Úlohy. Pro která kladná čísla x konvergují řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k e^{-k}$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\ln(k+2)}$; c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{k+5} x^{2k+1}$.

[a) $x \in (0, e)$; b) $x \in (0, 1)$; c) $x \in (0, 1)$.]

3.40. Úlohy. Které z uvedených alternujících řad konvergují:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k+3}$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k}{k^3}$; c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2+1}{5^k+3}$.

[a) nekonverguje; b) nekonverguje; c) konverguje.]

6.30. Úlohy. Určete poloměr konvergence mocninné řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \ln(k+1)}$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5 \cdot 2^{k+1}}$; c) $\sum_{k=0}^{\infty} (2^k + (-1)^{k+1}) z^k$; d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{\sqrt{k+1}}$.

[a) $r = 1$; b) $r = 2$; c) $r = \frac{1}{2}$; d) $r = 1$.]

6.31. Úlohy. Určete obor a poloměr konvergence řady:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2k}}{(k+1)^2}$; b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z+j)^k}{3^k}$; c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2j+1} \right)^{3k}$.

[a) $|z-1| \leq 1$, $r = 1$; b) $|z+j| < 3$, $r = 3$; c) $|z-1| < \sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$.]

6.32. Úlohy. Určete Taylorovu řadu funkce f v bodě $x_0 = 0$ a uveďte, kde řada konverguje:

a) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, $f(0) = \frac{1}{2}$; b) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$, $f(0) = 2$; c) $f(x) = \sin^2 x$;
 d) $f(x) = \sin x \cos 3x$; e) $f(x) = \sinh x$; f) $f(x) = \cosh x$.

[a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} x^k$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k (2 \cdot 4^k - 1)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbf{R}$;

e) $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbf{R}$; f) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbf{R}$;]