Derivace a diferenciál.

1. Nalezněte parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pro $f = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

2. Nalezněte diferenciál funkce $f = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1+x^2}$ v bodě $A = (1, -1)$.

3. Nalezněte tečné (nad)roviny k funkcím v zadaném bodě.
   (a) $z = 1 + x^2y^3$, $A = (-1, 1, ?)$,
   (b) $u = e^{x+xy+xyz}$, $A = (1, -1, -2, ?)$.

4. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $S:\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, která je
   (a) rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 3z = 0$.
   (b) kolmá na roviny $2x - y + z = 0$ a $2x - y - 5z = 0$.

5. Zjistěte hodnotu parametru s, aby se plochy $x^2 + y^2 + (z-s)^2 = 18$ a $z = x^2 + y^2$ protínaly pod úhlem $\frac{1}{2}\pi$.

6. Pro funkci $f(x, y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a_0 = (0, 0)$ určete
   (a) totální diferenciál a tečnou rovinu,
   (b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu.

1. Nalezněte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pro $\quad f = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

pro $(x,y) \in D(f)$

x^2+y^2

$$f = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right) - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)$$

$x^2+y^2 \to x^2$

$y^2 \quad y + x^2 - y^2$

x^2

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{\sqrt{x^2+y^2}+x} =$$

$$= \frac{\overset{-1}{\cancel{x-\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(\cancel{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right)} - \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(\cancel{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}-x} - \frac{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}+x} =$$

$$= \frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right) - y\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\,\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} =$$

$$= \frac{y\,(2x)}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

2. Nalezněte diferenciál funkce $f = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{1+x^2}$ v bodě $A = (1, -1)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{2xy}{(1+x^2)^2}}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,-1)} = \frac{\frac{2}{4}}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\nabla f\big|_A = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

$$df[h_1, h_2] = \frac{2}{5} h_1 + \frac{2}{5} h_2$$

3. Nalezněte tečné (nad)roviny k funkcím v zadaném bodě.

(a) $z = 1 + x^2y^3$, $A = (-1, 1, ?)$,

(b) $u = e^{x+xy+xyz}$, $A = (1, -1, -2, ?)$.

a) $z_A = 1 + 1 = 2 \qquad A = (-1, 1, 2)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A = -2. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A = 3$

tečná rov. $\quad z = 2 + (-2)(x+1) + 3(y-1)$

$2x - 3y + z + 3 = 0$

b) $u_A = e^{1-1+2} = e^2 \qquad A = (1, -1, -2, e^2)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+xy+xyz}(1+y+yz), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A = 2e^2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+xy+xyz}(x+xz), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A = (1-2)e^2 = -e^2$

$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x+xy+xyz}(xy), \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A = -e^2$

tečná nadrov.

$u = e^2 + 2e^2(x-1) - e^2(y+1) - e^2(z+2)$

$2e^2x - e^2y - e^2z - u - 4e^2 = 0$

4. Nalezněte tečnou rovinu k ploše $S: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, která je

(a) rovnoběžná s rovinou $x - 2y + 3z = 0$.

(b) kolmá na roviny $2x - y + z = 0$ a $2x - y - 5z = 0$.

a) $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$ $\qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\} = H_0$

$\nabla g = (2x, 4y, 6z)$

$\rho: x - 2y + 3z = 0 \qquad \vec{n}_\rho = (1, -2, 3)$

hledáme $(x,y,z) \in S$ tak že $(2x, 4y, 6z) = \lambda(1,-2,3) \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 4y = -2\lambda \\ 6z = 3\lambda \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = -\lambda/2 \\ z = \lambda/2 \\ \frac{\lambda^2}{4} + \frac{2\lambda^2}{4} + \frac{3\lambda^2}{4} = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ nebo $\begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x - 2y + 3z = 6$ nebo

$x - 2y + 3z = -6$

b) $\sigma_1: 2x - y + z = 0, \quad \vec{n}_{\sigma_1} = (2, -1, 1) \qquad \vec{n}_{\sigma_1} \times \vec{n}_{\sigma_2} = (6, +12, 0) = 6(1, 2, 0)$

$\sigma_2: 2x - y - 5z = 0, \quad \vec{n}_{\sigma_2} = (2, -1, -5)$

hledáme (x,y,z) tak že $\begin{cases} \nabla g = \lambda(1,2,0) \\ (x,y,z) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 4y = 2\lambda \\ 6z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases} \begin{cases} x = \lambda/2 = y \\ z = 0 \\ \frac{\lambda^2}{4} + 2\frac{\lambda^2}{4} = 6 \end{cases} \quad \lambda^2 = 8$

$\begin{cases} \lambda = 2\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} = y \\ z = 0 \end{cases}$ nebo $\begin{cases} \lambda = -2\sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \\ z = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x + 2y = 3\sqrt{2} \qquad x + 2y = -3\sqrt{2}$

5. Zjistěte hodnotu parametru s, aby se plochy $x^2 + y^2 + (z - s)^2 = 18$ a $z = x^2 + y^2$ protínaly pod úhlem $\frac{1}{2}\pi$.

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-s)^2 - 18$ $\quad H_{g_0} = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-s)^2 - 18 = 0\}$ koule

$h(x,y,z) = x^2+y^2-z$ $\quad H_{h_0} = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z = 0\}$ paraboloid

$\nabla g = (2x, 2y, 2(z-s)) = \vec{n}_1$

$\nabla h = (2x, 2y, -1) = \vec{n}_2$

normálové vektory tečných rovin jsou $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$, úhel $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, který svírají plochy je tak že

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$ $\quad$ Pro $\alpha = \pi/2$ $\quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

hledáme $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tak že $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+(z-s)^2 = 18 \\ x^2+y^2 = z \\ 4x^2+4y^2-2(z-s) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z + (z-s)^2 = 18 \\ 4z - 2(z-s) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2z+2s = 0 \\ z+(z-s)^2 = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = -s \\ -s + 4s^2 = 18 \end{cases}$

$4s^2 - s - 18 = 0$

$s = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+288}}{8} = \dfrac{1 \pm 17}{8} = \begin{cases} -2 \\ 9/4 \end{cases}$

$s = -2 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x^2+y^2 = 2 \\ (z+2)^2 = 16 \end{cases}$

$\boxed{s = -2}$

$s = 9/4 \Rightarrow \begin{cases} z = -9/4 \\ x^2+y^2 = -9/4 \\ \emptyset \end{cases}$

6. Pro funkci $f(x, y) = e^x \cos y + 2y$ v bodě $a_0 = (0, 0)$ určete

(a) totální diferenciál a tečnou rovinu,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu.

a) $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \langle e^x \cos y, -e^x \sin y + 2\rangle$ $\quad \nabla f|_{(0,0)} = \langle 1, 2\rangle$

$df[h_1, h_2] = \langle 1, 2\rangle \cdot \langle h_1, h_2\rangle = h_1 + 2h_2$

tečná rov. $z = f(0,0) + \langle 1, 2\rangle \cdot \langle x, y\rangle$

$z = 1 + x + 2y$

b) směr gradientu (nenulový) je směr největšího růstu $\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f(a_0)}{\|\operatorname{grad} f(a_0)\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$

Směr nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu $\vec{w} = -\vec{v} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$
(největšího poklesu)

směry nulového růstu jsou kolmé ke gradientu $\vec{u}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ a $\vec{u}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$