Extrémy funkcí více proměnných

1. Klasifikujte všechny body lokálních extrémů funkce f, jestliže

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$;

   (b) $f(x,y) = y\cos x$;

   (c) $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$;

   (d) $f(x,y) = x^2 - xy^2 + x^2y$.

2. Nalezněte všechny body v rovině $x - 2y + 3z = 0$, které jsou nejblíže bodu $(0,1,1)$.

3. Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejblíže bodu $(4,2,0)$.

4. Nalezněte body (globálního) minima a maxima funkce f na množině M, jestliže

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2,0), (0,2), (0,-2)$;

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   (c) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

5. Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovině $x + 2y + 3z = 6$.

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x;$

$\nabla f = \langle 3x^2 - 6x - 9,\ 3y^2 - 6y \rangle$ $\qquad \nabla f = \vec{o} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} x_1 = 3,\ x_2 = -1 \\ y_1 = 0,\ y_2 = 2 \end{matrix}$

stacionární body $P_1(3,0),\ P_2(3,2),\ P_3(-1,0),\ P_4(-1,2)$

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$H|_{P_1} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} D_1 = 12 \\ D_2 = -12 \cdot 6 < 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ P_1 je sedlový bod

$H|_{P_2} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} D_1 = 12 > 0 \\ D_2 = 12 \cdot 6 > 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ P_2 je lok. min.

$H|_{P_3} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} D_1 = -12 < 0 \\ D_2 = 12 \cdot 6 > 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ P_3 je lok. max

$H|_{P_4} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} D_1 = -12 \\ D_2 = -12 \cdot 6 < 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ P_4 je sedl. bod.

(b) $f(x,y) = y\cos x;$

$$\nabla f = \langle -y \sin x, \cos x \rangle$$

$$\nabla f = \vec{0} \quad : \quad \begin{cases} y \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y \cdot \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

$P_k = (\pi/2 + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou stacionární body.

$$H = \begin{pmatrix} -y\cos x & -\sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{|P_k} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D_2 = -1 < 0 \Rightarrow$$ P_k jsou sedlové body. $(\forall k \in \mathbb{Z})$

(c) $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$;

$$\nabla f = \langle y\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy\left(\frac{-2x}{2}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ x\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy\left(-\frac{2y}{2}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \rangle =$$

$$= \langle (y - x^2 y)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ (x - y^2 x)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \rangle$$

$$\nabla f = \vec{o} \iff \begin{cases} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

nebo

$$\begin{cases} 1-x^2 = 0 & x = \pm 1 \\ x(1-y^2) = 0 & y = \pm 1 \end{cases}$$

Stacionární body $P_1(0,0)$ $P_2(1,1)$ $P_3(1,-1)$, $P_4(-1,1)$, $P_5(-1,-1)$

$$H = \begin{pmatrix} (x^3y - 3xy)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & (1-x^2-y^2+x^2y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ (1-x^2-y^2+x^2y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & (y^3x - 3xy)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{pmatrix}$$

$H_{|P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D_2 = -1 < 0$ P_1 je sedlový bod;

$H_{|P_2} = H_{|P_5} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$ $D_1 = -2e^{-1} < 0$, $D_2 = 4e^{-2} > 0$;

P_2 a P_5 jsou lok. max

$H_{|P_3} = H_{|P_4} = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ $D_1 = 2e^{-1} > 0$, $D_2 = 4e^{-2} > 0$

P_3 a P_4 jsou lok. min.

(d) $f(x,y) = x^2 - xy^2 + x^2y$.

$$\nabla f = \langle 2x - y^2 + 2xy,\ -2xy + x^2 \rangle$$

$$\nabla f = \vec{o} \iff \begin{cases} 2x(1+y) - y^2 = 0 \\ x(-2y+x) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x(1+y) - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $P_1(0,0)$ stacion. bod

nebo

$\begin{cases} x = 2y \\ 2x(1+y) - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -4/3$. $P_2\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ stac. bod.

$$H = \begin{pmatrix} 2+2y & -2y+2x \\ -2y+2x & -2x \end{pmatrix} \qquad H|_{P_2} = \begin{pmatrix} -2/3 & -8/3 \\ -8/3 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$D_1 = -2/3 < 0$

$D_2 = \frac{-36}{9} - \frac{64}{9} < 0$

P_2 je sedlový bod

$$H|_{P_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = 0 \qquad \text{Sylvestrovo kritérium ?}$$

Zkoumáme funkci podél $y = 0$: $\tilde{f}(x,0) = x^2$, v bodě $x = 0$ $\tilde{f}$ má lok. min.

Zkoumáme funkci podél křivky $x = y^2$ $\hat{\hat{f}}(y^2, y) = y^4 - y^4 + y^5 = y^5$, v bodě $y = 0$ $\hat{\hat{f}}$ má sedlový bod.

Na závěr můžeme říci, že v P_1 f má sedlový bod

2. Nalezněte všechny body v rovině $x - 2y + 3z = 0$, které jsou nejblíže bodu $(0, 1, 1)$.

Vzdálenost bodu $X = (x, y, z)$ od bodu $A = (0,1,1)$

$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ $\quad M = \{(x,y,z) : x - 2y + 3z = 0\}$ $\quad$ (M není omezená množina)

Funkce $d(x,y,z)$ má ABS. MIN na M ve stejném bodě jako funkce $f(x,y,z) = [d(x,y,z)]^2$.

Vyšetříme funkce $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ na množině M zadané vazebnou podmínkou

$g(x,y,z) = 0$, kde $g(x,y,z) = x - 2y + 3z$

Lagrangeova funkce $\quad L(x,y,z,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \lambda(x - 2y + 3z)$

$\nabla L = \vec{o} \iff \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2(y-1) = 2\lambda \\ 2(z-1) = -3\lambda \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\lambda/2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 3/2\,\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} - 2(1+\lambda) + 3\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right) = 0 \end{cases}$ $\quad 1 - \lambda\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2}\right) = 0$ $\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{14} \\ y = \frac{8}{7} \\ z = \frac{11}{14} \\ \lambda = \frac{1}{7} \end{cases}$

$P\left(-\frac{1}{14}, \frac{8}{7}, \frac{11}{14}\right)$

Vzdálenost P od A: $g\left(-\frac{1}{14}, \frac{8}{7}, \frac{11}{14}\right)$

3. Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejblíže bodu $(4, 2, 0)$.

$f(x,y,z) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 \qquad M = \{(x,y,z) : z^2 - x^2 - y^2 = 0\}$

funkce (vzdálenost)^2 bodu $X = (x,y,z)$ od bodu $A(4,2,0)$ vyšetříme na $M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ kde $g(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$

$L(x,y,z,\lambda) = (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda(z^2 - x^2 - y^2)$

$$\nabla L = \vec{o} \iff \begin{cases} 2(x-4) = -2\lambda x \\ 2(y-2) = -2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$2z(1-\lambda) = 0$

$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ a $y = 0$, ale $2(0-4) \neq 0$, $2(0-2) \neq 0$

nebo

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2(x-4) = -2x & x = 2 \\ 2(y-2) = -2y & y = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 & z^2 = 5 \quad z = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

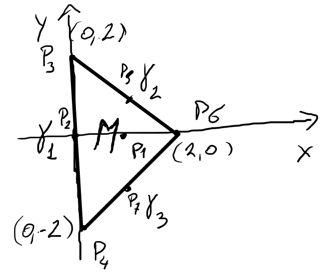
$P_1(2, 1, \sqrt{5}) \quad P_2(2, 1, -\sqrt{5})$

$f(P_1) = f(P_2) = 10$ V bodech P_1 a P_2 je minimum, maximum neexistuje, neboť funkce f je shora neomezená na M.

vzdálenost $P_{1,2}$ od $(4,2,0)$ je $\sqrt{10}$

Nalezněte body (globálního) minima a maxima funkce f na množině M, jestliže

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2,0), (0,2), (0,-2)$;



$\nabla f = \vec{o} \iff \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ $\quad P_1(1,0) \in M^\circ$ je stacionární bod

$\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

na $\gamma_1 = \{(x,y) : x=0, -2 \le y \le 2\}$ $\quad f(0,y) = y^2 \quad f'(y) = 2y \quad y=0$ je krit. bod $P_2(0,0)$

$y \in \langle -2,2 \rangle$: hraniční body $P_3(0,2)$, $P_4(0,-2)$

na $\gamma_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, y = -x+2\}$ $\quad f(x,-x+2) = 2x^2 - 6x + 4 \quad f'(x) = 4x - 6 \quad x = \frac{3}{2}$ je kr. bod $P_5\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x \in \langle 0,2 \rangle$: hraniční body $P_6(2,0)$ a $P_3(0,2)$

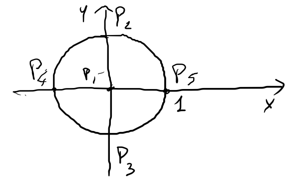
na $\gamma_3 = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, y = x-2\}$ $\quad f(x,x-2) = 2x^2 - 6x + 4 \quad f'(x) = 4x - 6 \quad x = \frac{3}{2}$ je kr. bod $P_7\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$x \in \langle 0,2 \rangle$: hraniční body P_4 a P_6

Porovnání hodnot $\quad f(P_1) = -1, \; f(P_2) = 0, \; f(P_3) = 4, \; f(P_4) = 4, \; f(P_5) = f(P_7) = -\frac{1}{2}, \; f(P_6) = 0$

f má $\underbrace{\text{ABS. MAX}}_{\text{na množině } M}$ v P_3 a P_4, f má ABS. MIN (na množině M) v P_1.

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;



M°: $\nabla f = \vec{o}$ $\quad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$ $\quad P_1(0,0)$ je stacionární bod, $P_1 \in M^\circ$

$\partial M = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, \; y^2 = 1 - x^2\}$

$f_{|\partial M} = f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1$ $\quad f' = 4x$, $x = 0$ je krit. bod $\quad P_2(0,1)$, $P_3(0,-1)$

$x \in \langle -1, 1 \rangle$ hraniční body $x = -1$, $x = 1$ $\quad P_4(-1,0)$, $P_5(1,0)$

Porovnání hodnot: $f(P_1) = 0$, $f(P_2) = f(P_3) = -1$, $f(P_5) = f(P_6) = 1$.

f má ABS. MAX v. P_5 a P_6, f má ABS. MIN v. P_2 a P_3.

<u>nebo</u> $\partial M = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ kde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\nabla L = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(-1+\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $\to \begin{cases} x = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $y = \pm 1$ $\quad P_2(0,1)$, $P_3(0,-1)$

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $x = \pm 1$ $\quad P_4(-1,0)$, $P_5(1,0)$

. . . .

<u>nebo</u> $\partial M = \{(x,y) : x = \cos\theta, \; y = \sin\theta, \; \theta \in \langle 0, 2\pi)\}$

$f_{|\partial M} = f(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$f'(\theta) = -4\sin\theta\cos\theta$.

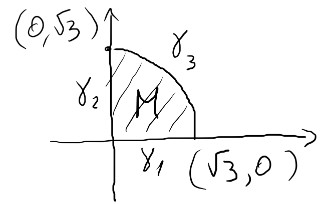
$f'(\theta) = 0$ $\quad \theta = 0 \Rightarrow P_5(1,0)$

$\theta = \pi/2 \Rightarrow P_2(0,1)$

$\theta = \pi \Rightarrow P_4(-1,0)$

$\theta = 3/2\,\pi \Rightarrow P_3(0,-1)$ . . . .

(c) $f(x,y)=xy^2$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 3\}$.



$\nabla f = \langle y^2, 2xy \rangle$

$\nabla f = \vec{o}$ $\begin{cases} y=0 \\ xy=0 \end{cases}$ stacionární body jsou všechny body množiny

$\gamma_1 = \{(x,0) : 0\leq x\leq \sqrt{3}\}$ $\gamma_1 \subset \partial M$

$\partial M = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

na $\gamma_2 = \{(0,y) : 0\leq y\leq\sqrt{3}\}$ $f|_{\gamma_2} = f(0,y) = 0$ $f' = 0$ na γ_2

na $\gamma_3 = \{(x,y) : x^2+y^2=3,\ x\in\langle 0,\sqrt{3}\rangle\}$; $f|_{\gamma_3} = f(x, \pm\sqrt{3-x^2}) = x(3-x^2) = 3x - x^3$ $f' = 3-3x^2$ $x=1$ je krit. bod

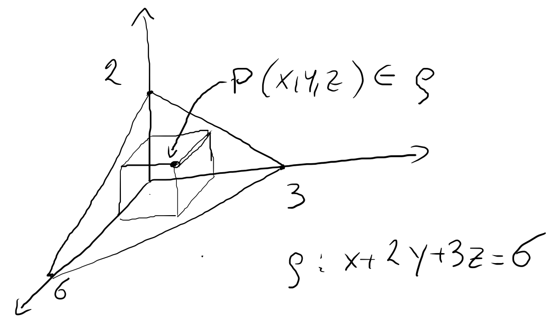
$0\leq x\leq\sqrt{3}$ hranic. body $\in \gamma_1\cup\gamma_2$ $P_1(1,\sqrt{2})$

$\forall P\in\gamma_1\cup\gamma_2$ $f(P)=0$

$f(P_1)=2$

Všechny body množiny $\gamma_1\cup\gamma_2$ jsou body minima, $P_1(1,\sqrt{2})$ je bod maxima.

Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovině $x + 2y + 3z = 6$.



Objem kvádru $f(x,y,z) = xyz$

kde $(x,y,z) \in M$ $\quad M = \{(x,y,z) : x+2y+3z=6,\ x\geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

M je omezená a uzavřená množina. [*pro $x=0, y=0$, nebo $z=0$ $f=0$]

$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x+2y+3z-6)$

$$\nabla L = \vec{o} \iff \begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + 2\lambda = 0 \\ xy + 3\lambda = 0 \\ x+2y+3z=6 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -yz \\ xz - 2yz = 0 & z \neq 0^* \\ xy - 3yz = 0 & y \neq 0^* \\ x+2y+3z=6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x/2 \\ z = x/3 \\ x + x + x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2/3 \end{array}$$

$P(2, 1, 2/3)$

$f(P) = \frac{4}{3}$ je maximum

[všechny body $A(x,y,z) \in M$ tak, že $x=0$, nebo $y=0$, nebo $z=0$ jsou body minima, a $f(A)=0$]