Lagrangeovy multiplikátory

1. Metodou Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže

   (a) $f(x,y) = e^{-xy}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;

   (b) $f(x,y,z) = 3x + 3y + 8z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\}$.

2. Mezi body množiny $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ nalezněte všechny, které jsou nejblíže (resp. nejdále) od bodu $a = (3,1,-1)$ a určete jejich vzdálenosti od a.

3. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a $x + 2z = 4$.

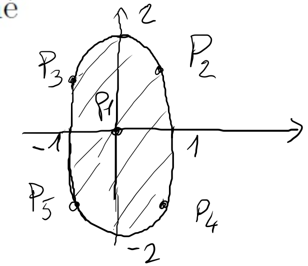
4. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte rozměry krabice tvaru kvádru tak, aby její objem byl maximální a plošný obsah krabice bez víka byl $12\,\mathrm{dm}^2$. (Předpokládejte, že řešení úlohy existuje.)

5. Mějme kužel $z = h - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, kde h je jeho výška. Vepište do něj

   (a) válec s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

   (b) kvádr s podstavou v rovině xy maximálního objemu.

1. Metodou Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže



(a) $f(x,y) = e^{-xy}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 1\}$;

$\nabla f = \langle -y e^{-xy}, -x e^{-xy} \rangle$

$\nabla f = \vec{0}$ pro $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ $\quad P_1(0,0) \in M^\circ$ $\quad P_1$ je stacion. bod. $\quad f(P_1) = 1$

na $\partial M = \{(x,y) : x^2+4y^2 = 1\} = \{(x,y) : g(x,y) = 0$ a $g(x,y) = x^2+4y^2-1\}$

$L(x,y,\lambda) = e^{-xy} + \lambda(x^2+4y^2-1)$

pokud $x=0$, pak $y=0$ ale $g(0,0) \neq 0$, takže předpokládejme že $x \neq 0$ a $y \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -y e^{-xy} + 2\lambda x = 0 \\ -x e^{-xy} + 8\lambda y = 0 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \to \lambda = \frac{y e^{-xy}}{2x} \\ \to \lambda = \frac{x e^{-xy}}{8y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y} \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} 8y^2 = 2x^2 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} x^2 = 4y^2 & x = \pm 2|y| \\ 8y^2 = 1 & y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$f(P_2) = f(P_5) = e^{-\frac{1}{4}}$, $\quad f(P_3) = f(P_4) = e^{\frac{1}{4}}$. $\quad P_2$ a P_5 jsou body minima, P_3 a P_4 jsou body maxima.

$f(P_1) = 1$

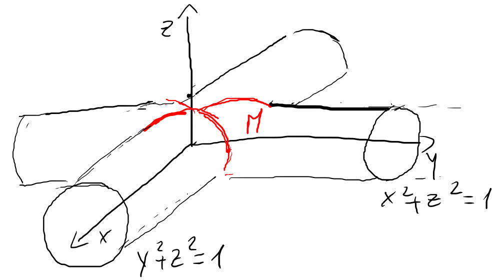
(b) $f(x,y,z) = 3x + 3y + 8z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\}$.

$g_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 1$

$g_2(x,y,z) = y^2 + z^2 - 1$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = 0, g_2(x,y,z) = 0\}$

$\nabla f = \langle 3, 3, 8 \rangle \neq \vec{o}$



Množina M je uzavřená a omezená, funkce f na ní nabývá min a max.

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 3x + 3y + 8z + \lambda_1(x^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 1)$

$$\nabla L = \vec{o} \quad \begin{cases} 3 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 3 + 2\lambda_2 y = 0 \\ 8 + 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 0 \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 \neq 0$ $\quad x = -\frac{3}{2\lambda_1}$

$\lambda_2 \neq 0$ $\quad y = -\frac{3}{2\lambda_2}$

$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ (*) $\quad z = \frac{-4}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$$\frac{9}{4\lambda_1^2} + \frac{16}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda_2^2} + \frac{16}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} = 1$$

$$\to \begin{cases} \frac{9}{4\lambda_1^2} = \frac{9}{4\lambda_2^2} \Rightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2^2 \\ \frac{9}{4\lambda_2^2} + \frac{16}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -\lambda_2$ ne! podmínka (*)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{9}{4\lambda_1^2} + \frac{16}{4\lambda_1^2} = 1 \end{cases} \quad \lambda_1^2 = \frac{25}{4} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \pm\frac{5}{2}$$

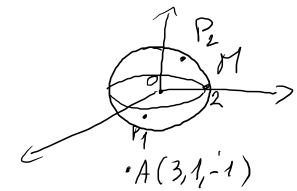
$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{5}{2}$ $\quad P_1\left(-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$; $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{5}{2}$ $\quad P_2\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$f(P_1) = -50$ $\qquad f(P_2) = 50$

: P_1 je bod minima

P_2 je bod maxima.

2. Mezi body množiny $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\}$ nalezněte všechny, které jsou nejblíže (resp. nejdále) od bodu $a = (3,1,-1)$ a určete jejich vzdálenosti od a.



Vzdálenost bodu $X=(x,y,z)$ od bodu $A=(3,1,-1)$

$$d(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

Funkce $d(x,y,z)$ nabývá min. a max na M ve stejném bodě jako funkce $f(x,y,z) = [d(x,y,z)]^2$

$f(x,y,z) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ Množina M je zadaná vazebnou podmínkou $g(x,y,z)=0$, kde

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$$

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(x^2+y^2+2z^2-4)$$

$\nabla L = \vec{o}$

$$\begin{cases} 2(x-3)+2\lambda x = 0 \\ 2(y-1)+2\lambda y = 0 \\ 2(z+1)+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1+\lambda) = 3 \\ y(1+\lambda) = 1 \\ z(1+\lambda) = -1 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3/1+\lambda \\ y = \frac{1}{1+\lambda} \\ z = -\frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{9}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{(\lambda+1)^2} = 4 \end{cases}$$

$(\lambda+1)^2 = \frac{11}{4} \to \lambda+1 = \frac{\sqrt{11}}{2}$, $P_1\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$

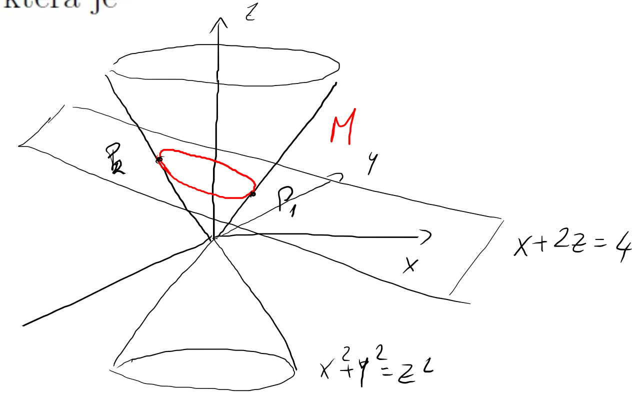
$\lambda+1 = -\frac{\sqrt{11}}{2}$ $P_2\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

$d(P_1) = \sqrt{15+4\sqrt{11}} = \sqrt{11}+2$ max

$d(P_2) = \sqrt{15-4\sqrt{11}} = \sqrt{11}-2$ min.

[vzdálenost A od O je $\sqrt{11}$, sféra má poloměr 2]

3. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a $x + 2z = 4$.



$M = \{(x,y,z) : g_1(x,y,z) = 0 \;\text{a}\; g_2(x,y,z) = 0\}$

kde $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ a $g_2(x,y,z) = x+2z-4$

$f(x,y,z) = z \qquad \nabla f = \langle 0,0,1 \rangle \qquad \nabla g_1 = \langle 2x, 2y, -2z \rangle \qquad \nabla g_2 = \langle 1,0,2 \rangle$

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = z + \lambda_1(x^2+y^2-z^2) + \lambda_2(x+2z-4)$

$\nabla L = \vec{o}$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 = 0 \\ x^2+y^2 = z^2 \\ x+2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = z^2 \\ x+2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm z \\ x+2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = z \\ z+2z = 4 \quad z = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad P_1\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -z \\ -z+2z = 4 \quad z = 4 \end{cases} \qquad P_2(-4, 0, 4)$$

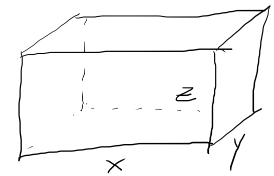
$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \text{! ne!}$$

$f(P_1) = \frac{4}{3}$ $\qquad$ P_1 je bod minima

$f(P_2) = 4$ $\qquad$ P_2 je bod maxima

(Množina M je uzavřená a omezená, funkce f na ní nabýva min a max)

4. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte rozměry krabice tvaru kvádru tak, aby její objem byl maximální a plošný obsah krabice bez víka byl $12\,\mathrm{dm}^2$. (Předpokládejte, že řešení úlohy existuje.)



$x,y,z>0$

Objem $V(x,y,z)=xyz$

Plošný obsah krabice bez víka $S(x,y,z)=2xz+2yz+xy=12$

$$g(x,y,z)=2xz+2yz+xy-12$$

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2xz+2yz+xy-12)$$

$$\begin{cases} yz+2\lambda z+\lambda y=0 \\ xz+2\lambda z+\lambda x=0 \\ xy+2\lambda x+2\lambda y=0 \\ 2xz+2yz+xy=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(y+2\lambda)=-\lambda y \\ z(x+2y)=-\lambda x \\ \text{''} \\ \text{''} \end{cases}$$

$y+2\lambda\neq 0$ ($y+2\lambda=0 \Rightarrow y=0$ objem $=0$)

$x+2y\neq 0$ ($x+2y=0 \Rightarrow x=0$)

$$z=\frac{-\lambda y}{y+2\lambda},\quad z=\frac{-\lambda x}{x+2\lambda} \Rightarrow \frac{-\lambda y}{y+2\lambda}=\frac{-\lambda x}{x+2\lambda} \Rightarrow (x+2\lambda)y=x(y+2\lambda) \Rightarrow$$

$\lambda\neq 0$ ($\lambda=0 \Rightarrow$ objem $=0$)

$$\begin{cases} z=-\dfrac{\lambda x}{x+2\lambda} \\ x=y \\ xy+2\lambda x+2\lambda y=0 \\ 2xz+2yz+xy=12 \end{cases}$$

$x=y$, $x(x+4\lambda)=0$

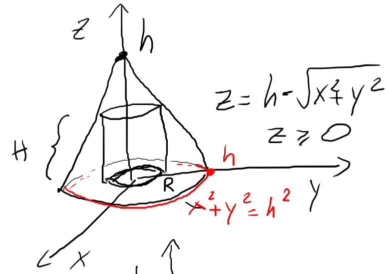
$$\begin{cases} z=-2\lambda \\ y=x \\ x=-4\lambda \\ 16\lambda^2+16\lambda^2+16\lambda^2=12 \end{cases}$$

$\lambda^2=\frac{1}{4}$, $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ ale $x,y,z>0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$, $x=y=2$, $z=1$

$V(2,2,1)=4$ max. objem.

5. Mějme kužel $z = h - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$, kde h je jeho výška. Vepište do

a) něj válec s podstavou v rovině xy maximálního objemu.



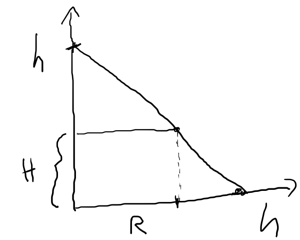
Válec má objem $V(R,H) = \pi R^2 \cdot H$

$$H = h - R$$

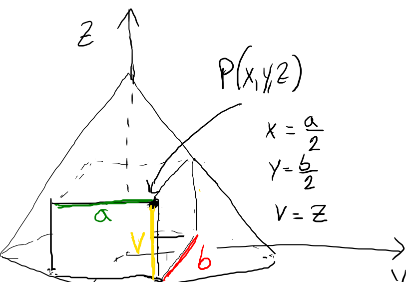
$$V(R) = \pi R^2 (h - R) = \pi h R^2 - \pi R^3$$

$$V'(R) = 2\pi h R - 3\pi R^2 \qquad V'(R) = 0 \qquad R = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$R = \frac{2}{3}h, \quad V = \frac{4}{27}h^3$$



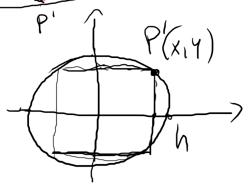
b) kvádr s podstavou v rovině xy maximálního objemu.



$x = \frac{a}{2}$

$y = \frac{b}{2}$

$v = z$



Kvádr má objem $V(x,y,z) = xyz$ kde $xyz \in \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0$ a $g(x,y,z) = z + \sqrt{x^2+y^2} - h\}$

$\underline{\underline{x, y, z > 0}}$

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(z + \sqrt{x^2+y^2} - h\right)$$

$$\begin{cases} yz + \dfrac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ xz + \dfrac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ z = h - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$z = \frac{-\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{y}$$

$$z = \frac{-\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-\lambda}{x\sqrt{2}} \\ x = y \\ \lambda = -x^2 \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}\,x} + \sqrt{2}\,x = h \end{cases}$$

$$3x = \sqrt{2}h \qquad \begin{cases} x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}h \\ z = \dfrac{h}{3}. \end{cases}$$

Délky hran kvádru: $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}h$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}h$, $v = \frac{h}{3}$.