Trojný integrál

1. Vypočtěte
$$\int_M y \, \mathrm{d}V,$$
kde množina Mv prvním oktantu ohraničená plochami $x + y = 1, y + z = 1$.

2. Nalezněte objem množiny M ohraničené plochami $y = x^2, z = 0, y + z = 1$.

3. Vhodnou substitucí vypočtěte
$$\int_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}V,$$
kde
$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

4. Nalezněte hmotný střed tělesa M ohraničeného plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, jehož hustota je $\varrho(x, y, z) = y$.

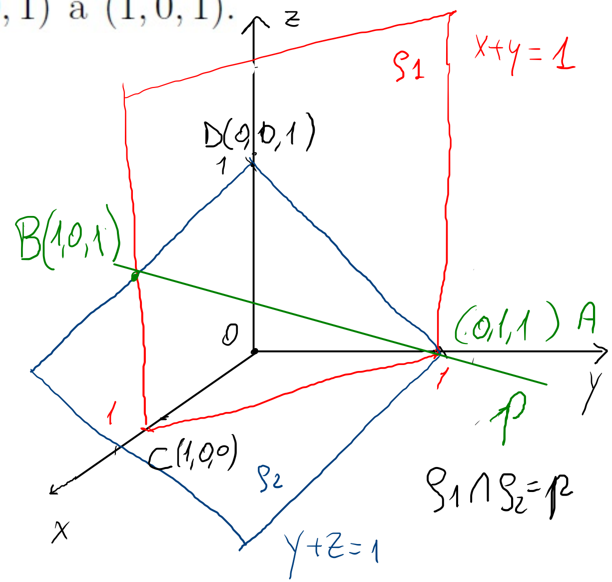
5. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa
$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq a^2, -h \leq z \leq h \right\},$$
kde $a, h > 0$, o hmotnosti m vzhledem k ose z.

1. Vypočtěte

$$\int_M y\,\mathrm{d}V,$$

kde množina Mv prvním oktantu ohraničená plochami $x+y=1, y+z=1$.

Množina M je jehlan s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ a $(1,0,1)$.



$A \in \rho_1 \cap \rho_2$ a $B \in \rho_1 \cap \rho_2$

$$\iiint_M y\,dV = \iint_T \int_0^{1-y} y\,dz\,dA =$$

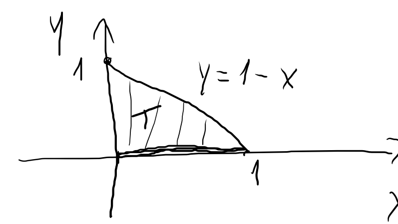
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y} y\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y(1-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$



2. Nalezněte objem množiny M ohraničené plochami $y = x^2, z = 0, y + z = 1$.

$$\iiint_M 1\, dV =$$

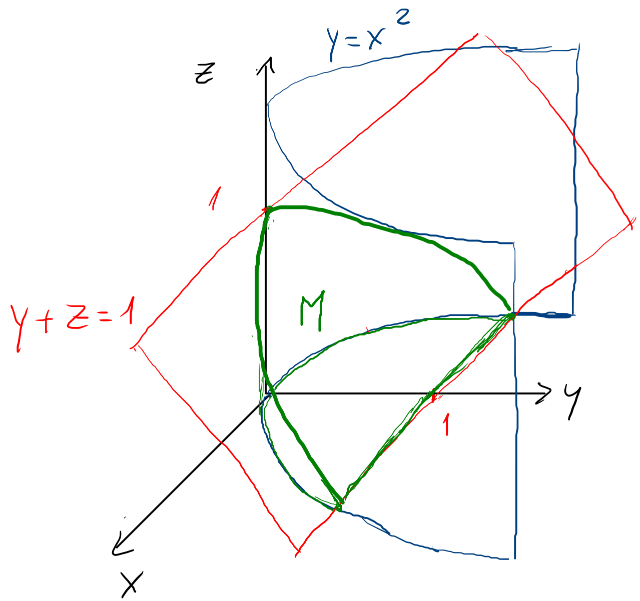
$$= \iint_T \int_0^{1-y} dz\, dA =$$

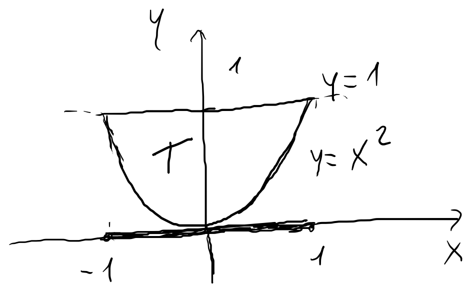
$$= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (1-y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_{-1}^{1} = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right] = \frac{8}{15}$$



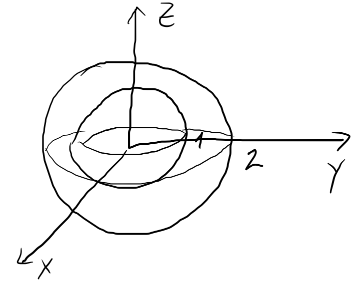


3. Vhodnou substitucí vypočtěte

$$\int_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}V,$$

kde

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\right\}.$$



Množina M je ohraničena sférami se středem v 0 a poloměry 1 a 2. Ve sférických souřadnicích je tak popsána nerovnostmi $1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a $0 \le \theta \le \pi$. Označme $M' = \{(r, \varphi, \theta) \,|\, 1 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi\}$. Z věty o substituci dostaneme

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \,dr\, d\theta\, d\varphi =$$

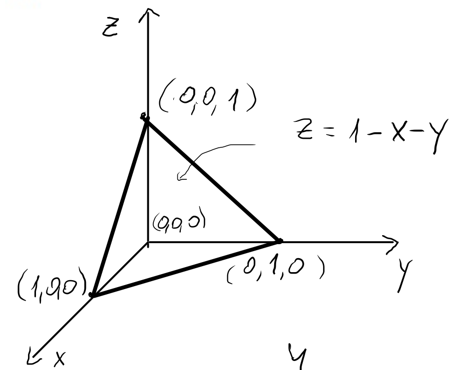
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta)\, d\theta \cdot \int_1^2 r^4 \,dr =$$

$$= 2\pi \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 = 2\pi\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right]\left[\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\right]$$

$$2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{31}{5} = \frac{248}{15}\pi$$

4. Nalezněte hmotný střed tělesa M ohraničeného plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$, jehož hustota je $\varrho(x, y, z) = y$.

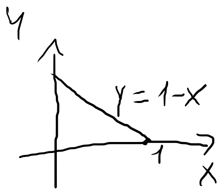
Množina M je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ a hmotný střed (x_T, y_T, z_T) má souřadnice



$$x_T = \frac{\int_M x\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}$$

$$y_T = \frac{\int_M y\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}$$

$$z_T = \frac{\int_M z\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}$$



$$\int_M \rho(x,y,z)\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} y\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}(1-x) - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\,dx = \left[\frac{-1}{6}\,\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

$$\int_M x\rho(x,y,z)\,dV = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xy\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}(1-x) - x\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-3x+3x^2-x^3)}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{30}\right]_0^1 = \frac{1}{120}$$

$$\int_M y\,\varrho(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y^2\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} y^2(1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}(1-x) - \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4}\right] dx = \left[-\frac{1}{12}\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

$$\int_M z\,\varrho(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} zy\,dz\,dy\,dx = 120 \quad (\text{kvůli symetrii})$$

hmotný střed (x_T, y_T, z_T) má souřadnice

$$x_T = \frac{\int_M x\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V} = \frac{1}{5},$$

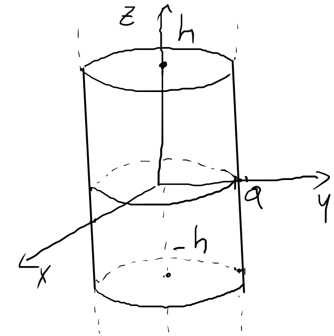
$$y_T = \frac{\int_M y\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V} = \frac{2}{5},$$

$$z_T = \frac{\int_M z\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\int_M \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}V} = \frac{1}{5}.$$

5. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le a^2, -h \le z \le h\right\},$$

kde $a, h > 0$, o hmotnosti m vzhledem k ose z.



Moment setrvačnosti I_z vzhledem k ose z je $\quad I_z = \int_M (x^2 + y^2)\varrho(x, y, z)\,\mathrm{d}V$

Homogenní těleso má konstantní hustotu. Hustota je proto $\varrho(x, y, z) = \frac{m}{V}$, kde m je hmotnost tělesa a V je jeho objem. Protože M je válec s poloměrem a a výškou $2h$, je $V = 2\pi h a^2$.

$$I_z = \frac{m}{2\pi h a^2} \int_M (x^2+y^2)\,dV = \frac{m}{2\pi h a^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{-h}^h r^2 . r\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{m}{2\pi h a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a r^3\,dr \cdot \int_{-h}^h dz =$$

$$= \frac{m}{2\pi h a^2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \left[1\right]_{-h}^h =$$

$$= \frac{m}{h a^2} \cdot \frac{a^4}{4} \cdot 2h = \frac{m a^2}{2}$$