# Křivkový integrál

## Zadání

1. Vypočtěte délku křivky $C$, jestliže

   (a) $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1, 4]$;

   (b) $C$ je graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

2. Vypočtěte křivkový integrál z funkce $f$ podél křivky $C$, jestliže

   (a) $f(x, y) = x^2 y$, $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $C$ je spojení úsečky s krajními body $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ a úsečky s krajními body $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

3. Vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky $C$, jestliže

   (a) $F(x, y) = (xy^2, -x^2)$, $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$;

   (b) $F(x, y) = (x^2, -xy)$, $C$ je část kružnice $x^2 + y^2 = 9$ ležící v prvním kvadrantu s počátečním bodem $(3, 0)$ a koncovým bodem $(0, 3)$.

1. Vypočtěte délku křivky $C$, jestliže

(a) $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1, 4]$;

$t \in [1,4]$

$\varphi'(t) = (2t, 9, 6\sqrt{t})$, $\quad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{4t^2+81+36t} = |2t+9| = 2t+9$

$\mathcal{L}(C) = \int_1^4 (2t+9)\,dt = \left[t^2+9t\right]_1^4 = 16+36-1-9 = 42$

(b) $C$ je graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

$\varphi(t) = \left(t, \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2t}\right)$, $t \in [\frac{1}{2}, 2]$

$\varphi'(t) = \left(1, \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2}\right)$

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{t^4-1}{2t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2+t^8-2t^4+1}{4t^4}} = \frac{t^4+1}{2t^2} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2}$

$\mathcal{L}(C) = \int_{1/2}^2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2}\right) dt = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2t}\right]_{1/2}^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48} + 1 = \frac{33}{16}$

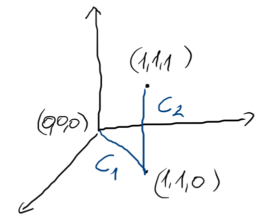
2. Vypočtěte křivkový integrál z funkce $f$ podél křivky $C$, jestliže

(a) $f(x,y) = x^2 y$, $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \sqrt{2}\,dt = \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\sqrt{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $C$ je spojení úsečky s krajními body $(0,0,0)$ a $(1,1,0)$ a úsečky s krajními body $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$.




$$C = C_1 \cup C_2 \qquad \int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$$

Úsečka AB má param. $\varphi(t) = A + t(B-A)$, $t \in [0,1]$

$C_1$: $\varphi_1(t) = (0,0,0) + t(1,1,0) = (t,t,0) \quad t \in [0,1]$

$\varphi_1'(t) = (1,1,0) \qquad \|\varphi_1'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\int_{C_1} f\,ds = \int_0^1 (t^2+t^2)\sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$C_2$: $\varphi_2(t) = (1,1,0) + t[(1,1,1)-(1,1,0)] = (1,1,t), \quad t \in [0,1]$

$\varphi_2'(t) = (0,0,1) \qquad \|\varphi_2'(t)\| = 1$

$$\int_{C_2} f\,ds = \int_0^1 (1+1+t^2)\,dt = \left[2t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

$$\int_C f\,ds = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{3}$$

3. Vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole **F** podél orientované křivky $C$, jestliže

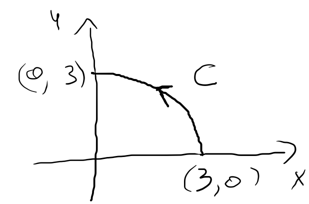
(a) $F(x,y) = (xy^2, -x^2)$, $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [0,1]$;

$$\varphi'(t) = (3t^2, 2t)$$

$$\int_C F \cdot ds = \int_0^1 \left(t^3 (t^2)^2, -(t^3)^2\right) \cdot (3t^2, 2t)\, dt = \int_0^1 (3t^9 - 2t^7)\, dt = \left[\frac{3t^{10}}{10} - \frac{2t^8}{8}\right]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

(b) $F(x,y) = (x^2, -xy)$, $C$ je část kružnice $x^2 + y^2 = 9$ ležící v prvním kvadrantu s počátečním bodem $(3,0)$ a koncovým bodem $(0,3)$.

$$\varphi(t) = (3\cos t, 3\sin t), \qquad t \in [0, \pi/2]$$




$$\varphi'(t) = (-3\sin t, 3\cos t)$$

$$\int_C F \cdot ds = \int_0^{\pi/2} (9\cos^2 t, -9\cos t \sin t) \cdot (-3\sin t, 3\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-27\cos^2 t \sin t - 27\cos^2 t \sin t)\, dt = 54\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = -18$$