Greenova věta, konzervativní pole, potenciál.

1. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole

$$F(x,y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2)$$

podél kladně orientované křivky, která je hranicí množiny

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq y \leq \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

2. Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah množiny M ohraničené křivkami $y = 5x - 3$, $y = x^2 + 1$.

3. Nalezněte hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby vektorové pole

$$F(x,y) = (\alpha xy + y^2, x^2 + 2xy)$$

bylo potenciální.

4. Je dáno vektorové pole $F(x,y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$.

   (a) Ověřte, že F je potenciální.

   (b) Nalezněte potenciál f pole F splňující $f(0,0) = 0$.

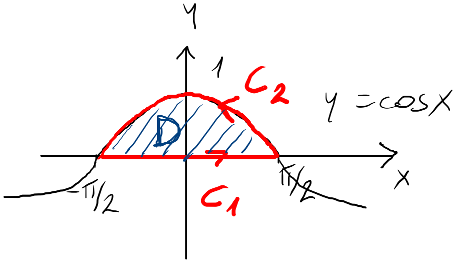
   (c) Vypočtěte $\int_C F(x,y)\,ds$, kde C je část hyperboly $y = \frac{1}{x}$ s počátečním bodem $(1,1)$ a koncovým bodem $(4, \frac{1}{4})$.

1. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole

$$F(x,y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2)$$

podél kladně orientované křivky, která je hranicí množiny

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$



$C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^{-y} + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} + y^2) \right] dA =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} (2x - 2y)\, dy\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[2xy - y^2 \right]_{y=0}^{y=\cos x} dx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2x\cos x - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \left[2x \sin x + 2\cos x - \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

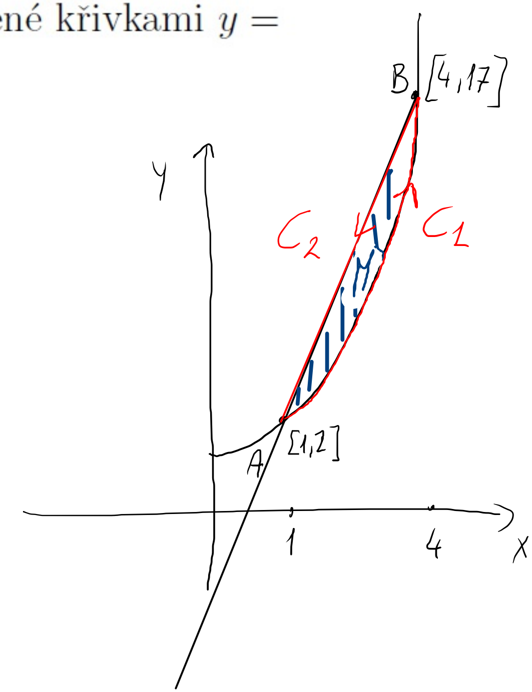
$$\int x \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} x & \cos x \\ 1 & \sin x \end{matrix} \right| \text{ per partes}$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x \sin x + \cos x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \right) dx$$

2. Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah množiny M ohraničené křivkami $y = 5x - 3$, $y = x^2 + 1$.



Obs. M $= \iint_M 1\, dA = \int_{C_1 \cup C_2} \vec{F}\, d\vec{s}$ kde $\vec{F}(x,y) = (0, x)$

$C_1: \varphi_1(t) = (t, t^2+1) \quad t \in \langle 1, 4 \rangle$

$\varphi_1'(t) = (1, 2t)$

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_1^4 \langle 0, t \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle\, dt = \int_1^4 2t^2\, dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(64 - 1) = 42$$

$C_2: \varphi_2(t) = B + t(A - B) = (4,17) + t(-3,-15) = (4-3t, 9-15t) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$

$\varphi_2'(t) = (-3, -15)$

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^1 (0, 4-3t) \cdot (-3, -15)\, dt = \int_0^1 -15(4-3t)\, dt = -15\left[4t - \frac{3t^2}{2}\right]_0^1 = -15\left(4 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{75}{2}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{s} = 42 - \frac{75}{2} = \frac{9}{2}$$

3. Nalezněte hodnotu parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby vektorové pole

$$F(x,y) = (\alpha xy + y^2, x^2 + 2xy)$$

bylo potenciální.

$\mathbf{rot}(\vec{F}) = 0$ $\quad \operatorname{rot} \vec{F} = \dfrac{\partial(x^2+2xy)}{\partial x} - \dfrac{\partial(\alpha xy + y^2)}{\partial y} =$

$$= 2x + 2y - (\alpha x + 2y) = 2x - \alpha x$$

$\vec{F}$ je potenciální $\iff$ $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ $\iff$ $\alpha = 2$

$\vec{F}(x,y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$ má potenciál. Potenciál je funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t. ž.

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2y + y^2x + C(y) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + C'(y)$ dle

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2$ $\qquad$ 2) $\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = K,\ K \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2y + y^2x + k$ je potenciál.

4. Je dáno vektorové pole $F(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$.

(a) Ověřte, že F je potenciální.

(b) Nalezněte potenciál f pole F splňující $f(0, 0) = 0$.

(c) Vypočtěte $\int_C F(x, y)\,ds$, kde C je část hyperboly $y = \frac{1}{x}$ s počátečním bodem $(1, 1)$ a koncovým bodem $(4, \frac{1}{4})$.

(a) $\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(3+2xy^2) = 4xy - 4xy = 0$, $\vec{F}$ je potenciální

(b) potenciál je funkce t. ž. 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + 2xy^2$ a 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y$

Od 1) $f(x,y) = 3x + x^2y^2 + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + C'(y) \overset{\text{od } 2)}{=} 2x^2y \Rightarrow C'(y) = 0$

$\Rightarrow C(y) = k$, $k \in \mathbb{R}$

$f = 3x + x^2y^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ je potenciál

c) $\int_C \vec{F}\,ds = f(B) - f(A) = \left[3x + x^2y^2\right]_{(1,1)}^{(4,\frac{1}{4})} = 12 + 16 \cdot \frac{1}{16} - (3 + 1 \cdot 1) = 9$

C od $A(1,1)$ do $B(4,\frac{1}{4})$