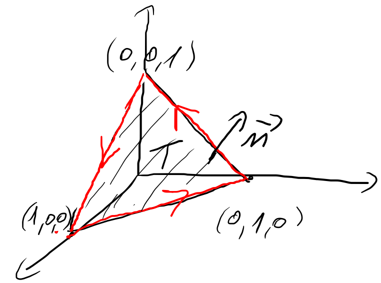
Dú 10

1 Částice se pohybuje v poli $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$ po obvodu trojúhelníka T, který leží v rovině $x + y + z = 1$ a má vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$. Orientace je dána pořadím vrcholů. Pomocí Stokesovy věty zjistěte vykonanou práci.

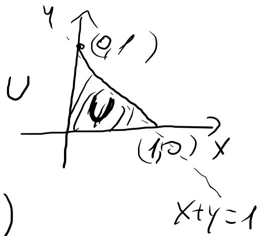
Řešení:



Stokes: $\displaystyle\int_{\partial T} \vec{F}\, ds = \iint_T \operatorname{rot} \vec{F}\, dS$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y)$$

$\pi_{12} T = U$



$T: \vec{\phi}(x,y) = (x, y, 1-x-y)$

$\phi_x = (1,0,-1) \qquad \phi_y = (0,1,-1)$

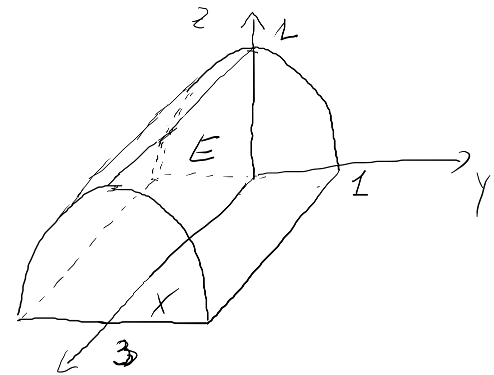
$\phi_x \times \phi_y = (1,1,1) = \vec{n}$

$$\iint_T \operatorname{rot} \vec{F}\, dS = \iint_U (-2(1-x-y), -2x, -2y) \cdot (1,1,1)\, dA =$$

$$= \iint_U (-2 + 2x + 2y - 2x - 2y)\, dA = -2 \iint_U dA = -2 \operatorname{Obsah}(U) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

2. Pomocí Gaussovy věty spočtěte tok pole $\vec{F}(x,y,z) = (z^2+x^2, -xy, 3y)$ hranicí tělesa omezeného plochami $z = 1-y^2$, $z=0$, $x=0$ a $x=3$. Hranice tělesa je orientovaná vnějším normálovým polem.

Řešení:



Gauss tok pole $\vec{F} = \iint_{\partial E} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z^2+x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(3y) = 2x - x = x$$

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_{-1}^{1}\int_0^3\int_0^{1-y^2} x\, dz\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_0^3 x(1-y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^3 x\, dx \cdot \int_{-1}^{1} (1-y^2)\, dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 \cdot \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{9}{2}\left(2\cdot\frac{2}{3}\right) = 6.$$