Mocninné řady. Fourierovy řady.

1. S využitím rozvoje exponenciály $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ nalezněte Taylorovu řadu funkce $f(x) = 5^{x+1}$ se středem $x_0 = 0$ a určete poloměr konvergence.

2. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n + \frac{1}{3}\right) x^{2n-1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

3. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ -1, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

1. S využitím rozvoje exponenciály $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ nalezněte Taylorovu řadu funkce $f(x) = 5^{x+1}$ se středem $x_0 = 0$ a určete poloměr konvergence.

$$f(x) = 5^{x+1} = 5 \cdot 5^x = 5 \cdot e^{\ln(5^x)} = 5\, e^{x \cdot \ln 5}$$

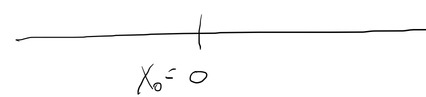
$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$ užijeme substituci $t = x \cdot \ln 5$

$$f(x) = 5\, e^{x \ln 5} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 5)^n}{n!} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln^n 5}{n!}}_{b_n} x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{n+1} 5\, |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\ln^n 5\, |x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{n+1} 5}{\ln^n 5} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 5 \cdot |x|}{n} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Poloměr konvergence je $R = \infty$



2. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(2n+\frac{1}{3}\right)}_{b_n} x^{2n-1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

$-1 \qquad x_0 = 0 \qquad 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left[2(n+1)+\frac{1}{3}\right] x^{2(n+1)-1}}{\left[2n+\frac{1}{3}\right] x^{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+\frac{7}{3}}{2n+\frac{1}{3}} \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{|x|^{2n-1}} = |x|^2 < 1$$

pro $|x| < 1$

Poloměr konvergence je $R = 1$. Pro $|x| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n+\frac{1}{3}\right) x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, x^{-1} \cdot x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} x^{-1} \cdot x^{2n} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(x^2\right)^{n-1} + \frac{1}{3x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2\right)^n$$

po dosazení $y = x^2$

$$= 2x \frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{3x} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{3(1-x^2)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+1} = y \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{y}{1-y}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, y^{n-1} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right]' = \left[\frac{y}{1-y}\right]' = \frac{1}{(1-y)^2}, \quad |y| < 1$$

$k = n-1$

3. Nalezněte Fourierovu řadu 2π-periodické, po částech konstantní funkce, pro kterou platí

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0), \\ -1, & \text{pro } x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

Zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f.

$T = 2\pi$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \qquad b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -1 \, dt = \frac{-\pi}{\pi} = -1$$

$f(x) + \frac{1}{2}$ je liché funkce, tak $a_k = 0$ pro $k \geq 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kt}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \pi t - 1}{k} \right] = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, 6, \dots \\ -2, & k = 1, 3, 5 \dots \end{cases}$$

Four. řada: $$\frac{-1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin kt = \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)\pi} \sin (2n-1) t = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{1}{2}, & x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$k = 2n - 1$