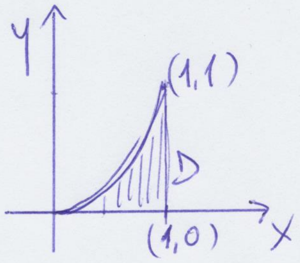
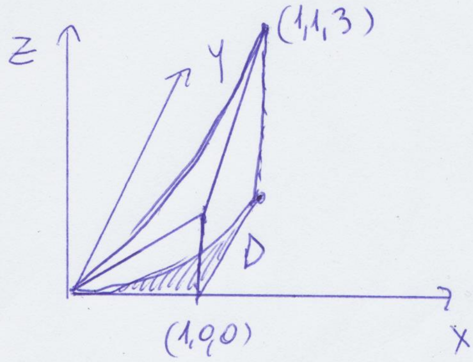
1.

$$\iiint\limits_E y \, dV,$$

kde E je ohraničeno shora rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině $z = 0$ ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.





Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le x + 2y, \quad 0 \le y \le x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

I zde platí

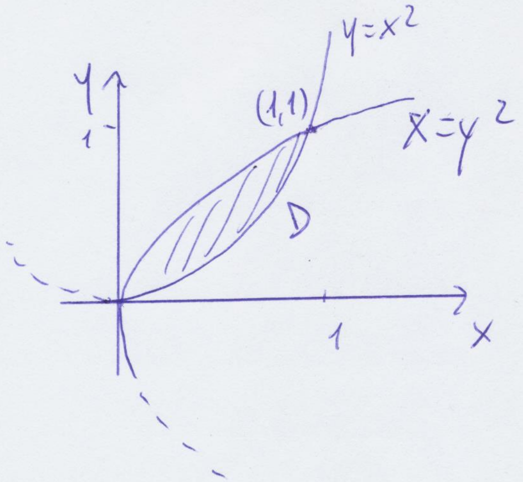
$$\iiint\limits_E y \, dV = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x + 2y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} x + \frac{2y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

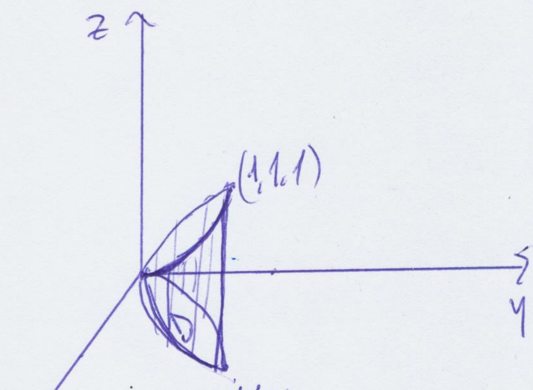
$$= \int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \, dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} = \frac{5}{28}.$$

2.

$$\iiint\limits_E xyz \, dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.





Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Máme tedy

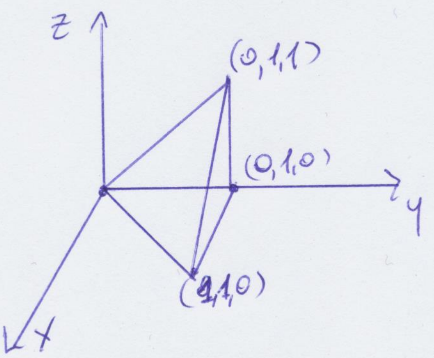
$$\iiint\limits_E xyz \, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2} \, dy \, dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11} \, dx =$$

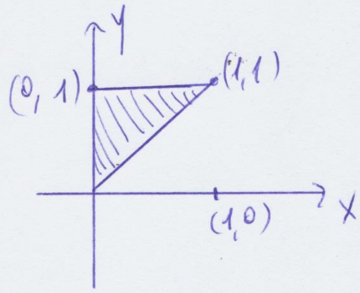
$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{96}.$$

3.

$$\iiint\limits_E xy \; dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.





Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

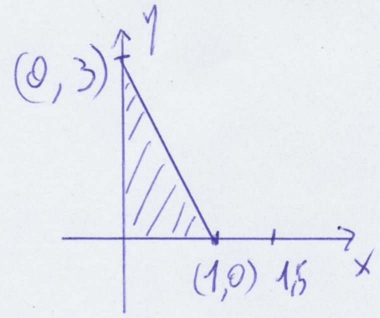
Máme tedy

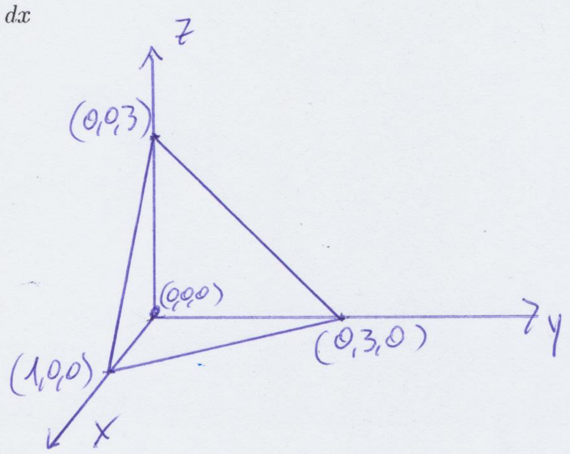
$$\iiint\limits_E xy \; dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy \; dz \; dx \; dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 x - x^2 y \; dx \; dy = \int_0^1 \left[y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3} \; dy = \left[\frac{y^5}{30} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

4. Načrtněte oblast integrace:

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx$$





Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3 - 3x \quad \& \quad 0 \le z \le 3 - 3x - y \; .$$

Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako

$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 3 - 3x$$

což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,3)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = 3 - 3x - y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ a $(0,0,3)$.

Integrál vyjadřuje jeho objem, který si pro procvičení zintegrujeme (i když bychom ho asi uměli spočítat i jinak: *objem* $= \frac{1}{3}$ *podstava*$\times$*výška*). Máme tedy

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (3 - 3x - y) \, dy \, dx = \int_0^1 (3-3x)^2 - \frac{(3-3x)^2}{2} \, dx =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \; .$$