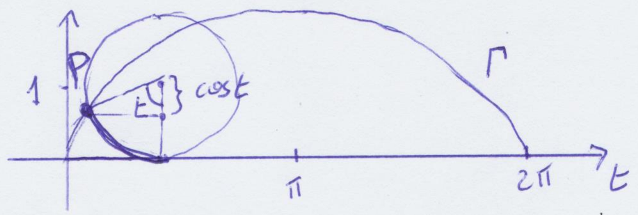
Délka křivky, křivkový integrál.

1 Určete délku cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.



Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako $\ell(\Gamma) = \int\limits_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \ \left(= \int\limits_\Gamma 1\ ds \right)$. Máme

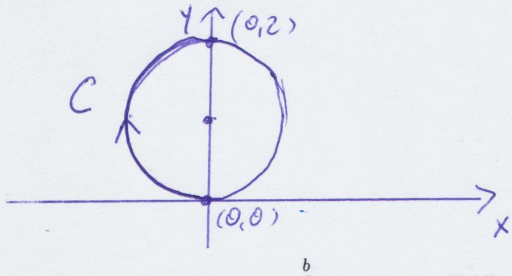
$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t,\ \sin t\Big) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_\Gamma 1\ ds = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix} \right] = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2u)}\ du =$$

$$= \Big\{ \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \Big\} = 4\int\limits_0^{\pi} \sin u\ du = 8\ .$$

2 Spočítejte $\int\limits_C (x+y)\,ds$, kde C je levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0,1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,2)$.



Integrál z funkce f podél křivky C spočítáme podle vztahu $\int\limits_C f\ ds = \int\limits_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt$, kde φ je vhodná parametrizace křivky C.

Parametrizace C: Křivka splňuje rovnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$, proto použijeme posunuté polární souřadnice.

$$\varphi(t) = (\cos t, 1 + \sin t) \quad \text{pro} \quad \tfrac{\pi}{2} \le t \le \tfrac{3\pi}{2}.$$

Tato parametrizace však probíhá křivku v opačném směru! To ale nevadí, protože integrál z funkce nezávisí na volbě orientace.

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1.$$

Takže

$$\int_C (x+y)\ ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x+y)_{|\varphi(t)} \cdot ||\varphi'(t)||\ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1 + \sin t + \cos t\ dt = \pi + 2\ .$$

3 Spočítejte $\int_C \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds$, kde C je: a) $x^2+y^2=4x$, b) $x^2+y^2=4$.

Funkce je definovaná a spojtá v $\mathbb{R}^2 \setminus [0,0]$.

a) $[0,0] \in C$, a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \infty$, takže integrál neexistuje.

b) $[0,0] \notin C$, takže integrál existuje.

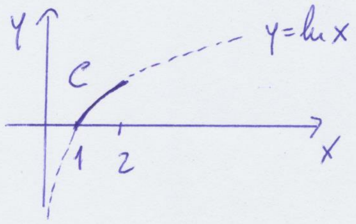
$$\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\varphi'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2.$$

Takže

$$\int_C \frac{x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds = \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t + 2}{2}\ 2\ dt = 4\pi\ .$$

4 Spočítejte $\int_C x^2\, ds$, kde C je graf funkce $f(x) = \ln x$, $x \in < 1, 2 >$.



Parametrizace křivky C je $\varphi(t) = (t, \ln t)$ pro $1 \le t \le 2$.

$$\varphi'(t) = (1, \frac{1}{t}) \quad \text{a} \quad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}.$$

Takže

$$\int_C x^2\ ds = \int_1^2 t^2 \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\ dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\ dt = \frac{1}{3}\left[(t^2+1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})\ .$$

5 Určete

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad \text{kde} \quad \vec{F} = (y,\ z,\ x)$$

a $C: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$ je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Připomenutí: Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky C počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky C).

Jestliže parametrizace $\varphi : \langle a, b\rangle \to C$ odpovídá zvolené orientaci, pak máme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace C, pak máme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

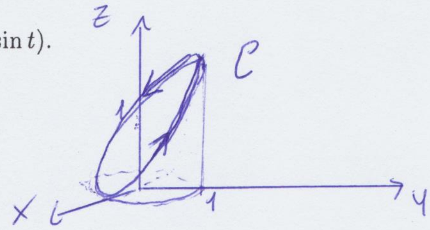
Máme pole $\vec{F} = (y,\ z,\ x)$. Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny. Je to tedy elipsa a její orientace je určena pomocí průmětu $\mathcal{C}$ do roviny xy, v němž má mít tento průmět kladnou orientaci (tím je myšleno to "při pohledu shora", tj. když se na křivku budeme dívat tak, aby osa z směřovala k nám).

Průmět $\mathcal{C}$ do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$ a jeho kladná orientace je určena obvyklou parametrizací

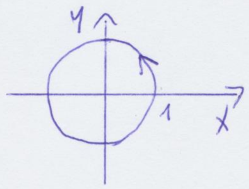
$$x(t) = \cos t\ , \quad y(t) = \sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\ .$$

Parametrizace křivky $\mathcal{C}$ je $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t)$ pro $0 \le t \le 2\pi$.

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t).$$



Takže



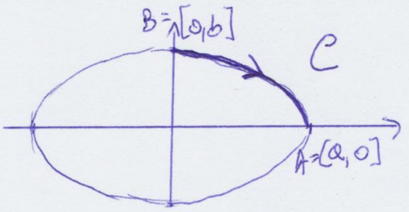
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\sin t, 1 - \cos t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t)\ dt = \int_0^{2\pi} \Big(\sin t \cdot (-\sin t) + (1 - \cos t) \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t \Big)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1 + \cos t + \cos t \cdot \sin t)\ dt = -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\ dt}_{=0} = -2\pi\ .$$

6 Určete

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad \text{kde} \quad \vec{F} = (-y,\ x)$$

a $\mathcal{C}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$ od $B = [0, b]$ do $A = [a, 0]$.



Parametrizace křivky $\mathcal{C}$ je $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$ pro $0 \le t \le \pi/2$.

$$\varphi'(t) = (-a \sin t, b \cos t).$$

Orientace křivky není souhlasná s parametriyací, takže

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{\pi/2} (-b \sin t, a \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t)\ dt = -\int_0^{\pi/2} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t)\ dt = -ab\frac{\pi}{2}.$$