Greenova věta, Stokesova věta, Gaussova věta, konzervativní pole, potenciál.

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena jednoduchou uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$. Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

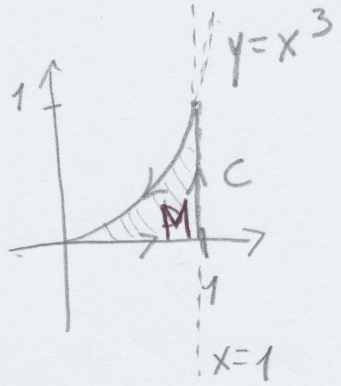
Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír"na okraji oblasti.

1 Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x,y) = (2xy^3,\ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

$$\iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_M (8xy^2 - 6xy^2)\, dA =$$

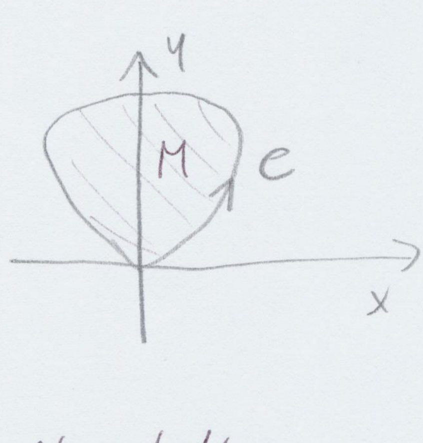


$$= \iint_M 2xy^2\, dA = \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 2x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{x^3} dx = \int_0^1 2x \frac{x^9}{3} dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^{11}}{11} \right]_0^1 = \frac{2}{33}$$

2 Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou $\varphi(t) = (\sin 2t, \sin t)$ pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$\vec{F} = \langle 0, x \rangle, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$



$$\varphi(t) = \langle \sin 2t, \sin t \rangle \quad t \in [0, \pi)$$

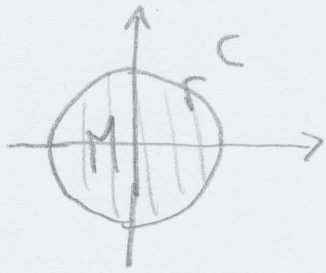
$$\varphi'(t) = \langle 2\cos 2t, \cos t \rangle$$

$$\text{Obs}(M) = \iint_M 1\, dA = \int_C \vec{F} \cdot ds =$$

$$= \int_0^\pi \langle 0, \sin 2t \rangle \cdot \langle 2\cos 2t, \cos t \rangle\, dt = \int_0^\pi \sin 2t \cos t\, dt =$$

$$= \int_0^\pi 2 \sin t \cos^2 t\, dt = -\left[\frac{2\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

3 Pomocí Greenovy věty spočítejte $\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\, dy$ kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.



$$\vec{F} = \langle 3y - e^{\sin x}, 7x + \sqrt{y^4+1} \rangle$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 7 - 3 = 4$$

$$\int_C \vec{F}\, ds = \iint_M 4\, dA = 4 \iint_M dA = 4\, \text{Obsah}(M) = 36\pi$$

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

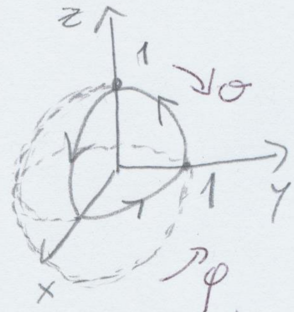
$$\operatorname{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

4 Spočítejte práci síly

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^x + z^2\right)\vec{i} + \left(y^y + x^2\right)\vec{j} + \left(z^z + y^2\right)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je pozitivně orientovaná.



$$\operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^x + z^2 & y^y + x^2 & z^z + y^2 \end{vmatrix} = \langle 2y, 2z, 2x \rangle$$

$$M: \Phi(\varphi, \sigma) = \langle 2 \sin\sigma \cos\varphi, 2 \sin\sigma \sin\varphi, 2\cos\sigma \rangle \quad \sigma \in \langle 0, \pi/2 \rangle \quad \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$$

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\sigma = \langle -4\sin^2\sigma \cos\varphi, -4\sin^2\sigma \sin\varphi, -4\sin\sigma\cos\sigma \rangle \leftarrow \text{opačný směr!}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot ds = \iint_M \langle 4\sin\sigma \sin\varphi, 4\cos\sigma, 4\sin\sigma\cos\varphi \rangle \cdot \langle 4\sin^2\sigma\cos\varphi, 4\sin^2\sigma\sin\varphi, 4\sin\sigma\cos\sigma \rangle\, d\sigma\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 16\left(\sin^3\sigma \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\sigma\cos\sigma\sin\varphi + \sin^2\sigma\cos\sigma\cos\varphi\right) d\sigma\, d\varphi =$$

$$= 16\left[\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\sigma\, d\sigma + \int_0^{\pi/2} \sin^2\sigma\cos\sigma\, d\sigma \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi\right]$$

$$= 16\left[\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)_0^{\pi/2} \left(-\cos\sigma + \frac{\cos^3\sigma}{3}\right)_0^{\pi/2} + \left(\frac{\sin^3\sigma}{3}\right)_0^{\pi/2} \left(-\cos\varphi + \sin\varphi\right)_0^{\pi/2}\right] = 16.$$

5 Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

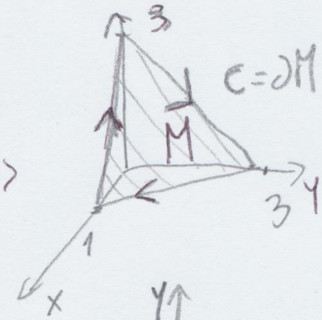
$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \langle 3x, x-3y, 2y \rangle$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

$M \quad \phi(x,y) = \langle x, y, 3-3x-y \rangle \qquad (x,y) \in D$

$\phi_x = (1, 0, -3) \qquad \phi_x \times \phi_y = (3, 1, 1)$

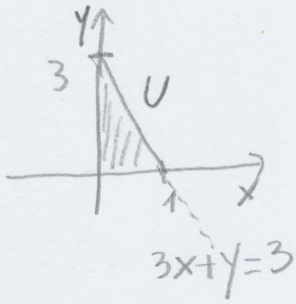
$\phi_y = (0, 1, -1) \qquad$ špatný směr $\vec{m} = \langle -3, -1, -1 \rangle$



$$\int_C F\,ds = \iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\,dS = \iint_U \left(\operatorname{rot}\vec{F}|_\phi \cdot \vec{m}\right) dA =$$

$$\iint_U \langle 3x, x-3y, 2y \rangle \cdot \langle -3, -1, -1 \rangle\, dA = \int_0^1 \int_0^{3-3x} (-10x + y)\, dy\, dx$$

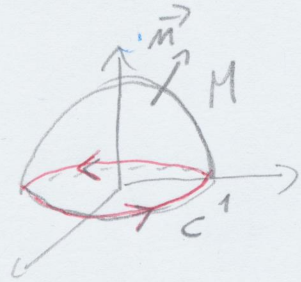
$$= \int_0^1 \left[-10x(3-3x) + \frac{(3-3x)^2}{2}\right] dx = -7/2$$



6 Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint_M \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S},$$

kde $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.



$C = \partial M: \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$\varphi'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$

$$\iint_M \operatorname{rot}\vec{F}\,dS = \int_C \vec{F}\,ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle 0, \cos t, e^{\cos t \sin t} \rangle \cdot \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

Gaussova věta

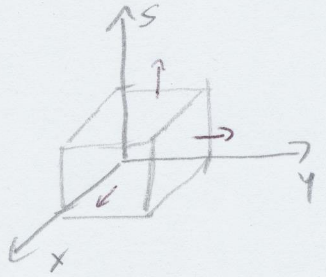
$$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$$

dává do souvislosti tok pole $\mathbf{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\mathbf{F}$ a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

7 Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x,\ xy,\ 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0,1\rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.



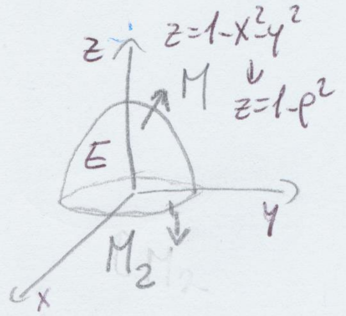
$$\operatorname{div}\vec{F} = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

$$\iint_S \vec{F}\, dS = \iiint_E (3+3x)\, dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3+3x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 (3+3x)\, dx \cdot \int_0^1 dy \cdot \int_0^1 dz = \left[3x + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = 9/2$$

8 Pomocí Gaussovy věty určete $\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S}$ kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.



$$\iint_{M \cup M_2} \vec{F}\, dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\, dV \Rightarrow \iint_M \vec{F}\, dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\, dV - \iint_{M_2} \vec{F}\, dS$$

$M_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$

$M_2 : \varphi(x,y) = (x,y,0) \quad (x,y) \in D \quad D = \{(x,y)\ x^2+y^2 \leq 1\}$

$\varphi_x \times \varphi_y = (0,0,1)$ sp. orient. $-(\varphi_x \times \varphi_y) = (0,0,-1)$

$$\iint_{M_2} \vec{F}\, dS = \iint_D (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\, dA = 0.$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+1 = 3$$

$$\iint_M \vec{F}\, dS = \iiint_E 3\, dV = \text{cyl. sou.} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-\rho^2} 3\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3\rho(1-\rho^2)\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{3\rho^4}{4}\right)_0^1 = 3/2\,\pi.$$

Připomenutí: Práce síly $\vec{F}$ v *oblasti* U (tj. otevřené množině) z bodu A do bodu B nezávisí na dráze právě když pole má potenciál (pole je konzervativní), tj. existuje funkce $f : U \to \mathbb{R}$, že $\mathrm{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B \mathrm{grad}(f)\, d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Pokud je oblast U navíc jednoduše souvislá (tj. jakákoliv uzavřená křivka v U se dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu), pak toto nastává právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0$ na celém U.

Příkladem jednoduše souvislé oblasti je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ "přímka" nebo torus (tj. "pneumatika").

9 Dokažte, že následující pole je konzervativní, najděte jeho potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B.
$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y,\ \ y^2 + x,\ \ ze^z)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$.

Po dosazení máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0 - 0,\ \ 0 - 0,\ \ 1 - 1) = \vec{0},$$

tedy rotace je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ a pole $\vec{F}$ má potenciál.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^z\ . \qquad (3)$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int (x^2 + y)\, dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y, z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y, z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = y^2.$$

Dostáváme $C(y, z) = \int y^2\, dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\, dz = (z - 1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z - 1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1, 1, 0) - f(0, 1, 0) = -2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\ .$$

https://math.feld.cvut.cz/korbelar/mat2/mat$_2$.*htm*