Lineární algebra

Natalie Žukovec

1. cvičení 2020

Číselné množiny

Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Celá čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Racionální čísla $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Reálná čísla $\mathbb{R}$ lze vyjádřit desetinným rozvojem (konečným nebo nekonečným)

Iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Komplexní čísla $\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1\}$

Sčítání, odčítaní, násobení a dělení

$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad x/y$ (pro $y \neq 0$)

V $\mathbb{N}$ sčítání je zobrazení $\quad + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; : \; (x, y) \mapsto x + y$

odčítaní není zobrazení do $\mathbb{N}$, protože pro $1, 2 \in \mathbb{N}$ platí $1 - 2 \notin \mathbb{N}$

násobení je zobrazení $\quad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; : \; (x, y) \mapsto xy$

dělení není zobrazení do $\mathbb{N}$, protože pro $1, 2 \in \mathbb{N}$ platí $1/2 \notin \mathbb{N}$

V $\mathbb{Z}$ sčítání, odčítaní, násobení

dělení se zbytkem: pro každé $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, existuji $p, z \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$x = yp + z, \quad 0 \leq z < y.$$

Komplexní čísla

Ať máme $x, y \in \mathbb{C}$, pak $x = a + bi$, $y = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$x + y = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$,

$x - y = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$,

$xy = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$,

Komplexně sdružené číslo k $x = a + bi$ je $\bar{x} = a - bi$.

Platí $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$? Platí $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$? Kdy platí $x = \bar{x}$?

$x/y = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{y\bar{y}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Polynomy

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in ?$

$\mathbb{Z}[x]$, pokud $a_i \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Q}[x]$, pokud $a_i \in \mathbb{Q}$,

$\mathbb{R}[x]$, pokud $a_i \in \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{C}[x]$, pokud $a_i \in \mathbb{C}$

Stupeň polynomu: $\deg P(x) = n$, pokud $a_n \neq 0$

Nulový polynom ...

Kořen polynomu: α je kořen $P(x)$, pokud $P(\alpha) = 0$.

Ať $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ a ať $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořen $P(x)$.

Dokažte, že potom $\bar{\alpha}$ je kořen $P(x)$.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Součet $P + Q$? $\quad (P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$

Platí, že stupeň $\deg(P + Q) = \deg P + \deg Q$?

Rovnost $P = Q$, pokud $\quad m = n$

$a_i = b_i$ pro všechna i od 0 do $n = deg(P)$

Spočtěte součin $(3x^5 - 7x + 4)(2x - 10)$

Vydělte polynom $3x^4 + 5x$ polynomem $x^2 - 2$ se zbytkem.

Dělení polynomů se zbytkem:

pro každé $P(x), Q(x)$, $Q(x) \neq 0$, existuji $Y(x), Z(x)$ tak, že

$P(x) = Q(x)Y(x) + Z(x)$, kde $deg(Z) < deg(Q)$.

Delení polynomem $(x - \alpha)$ ...

k-násobný kořen polynomu ...

Hornerovo schema

Jak vypočítat hodnoty daného polynomu, abychom co nejméně násobili?

$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0.$

$$
\begin{array}{cccccc}
a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & c \\
 & b_4c & b_3c & b_2c & b_1c & \\
\hline
b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \boxed{b_0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
b_4 &= a_4 \\
b_3 &= a_3 + b_4c \\
b_2 &= a_2 + b_3c \\
b_1 &= a_1 + b_2c \\
b_0 &= a_0 + b_1c = P(c)
\end{aligned}
$$

$P(x) = Q(x)(x - c) + P(c)$, kde $Q(x) = b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1$.

Hornerovým schematem spočtěte hodnotu $P(2)$ pro
$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x - 7$.

Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^3 + 11x + 30$.

Pokud tento polynom má celočíselný kořen α, potom číslo α musí dělit číslo 30.