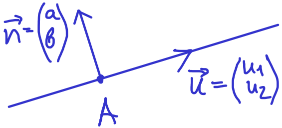
Lineární algebra

Natalie Žukovec

2. cvičení 2020

Rovnice přímky v rovině $\mathbb{R}^2$



- $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $\vec{x} = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$, bod $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, směrový vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

  $$x = a_1 + tu_1$$
  $$y = a_2 + tu_2$$

$, \quad t = \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$

$u_2(x - a_1) = u_1(y - a_2)$

Nalezněte parametrickou a obecnou rovnici přímky v $\mathbb{R}^2$, která je určena body $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\vec{x} = A + \vec{AB} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x = 1 + t$
$y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$3x - y = c$, v bodě A: $3 - 1 = c$

$c = 2$

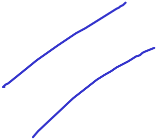
$3x - y = 2$

b) $t = x - 1 = \frac{y - 1}{3}$, $\quad 3x - 3 = y - 1$

$3x - y = 2$

Vzájemná poloha přímek

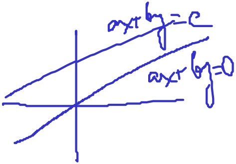
- rovnoběžné



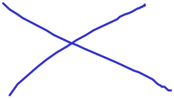
$p: ax+by=c$

$q: \alpha a x + \alpha b y = d$

$d \neq \alpha c$



- různoběžné

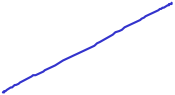


$p: ax+by=c$

$q: a_1x+b_1y=c_1$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix}a_1\\b_2\end{pmatrix}$

- shodné



$p: ax+by=c$

$q: \alpha a x + \alpha b y = \alpha c$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \neq 0$

Nalezněte průsečík přímek p a q v rovině

- $p : 2x + 3y = 3$

  $q : x - 5y = -5$

$2(-5+5y)+3y=3, \quad 13y = 13$

$x = -5+5y \quad y = 1$

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x = 0$

- $p : x + y = 6$

  $q : B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x = 2 + t3 \quad t \in \mathbb{R}$

$y = 0 + t(-1)$

$2+3t+(-t) = 6, \quad 2t = 4, \quad t = 2$

$x = 2+6 = 8 \quad A = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

$y = -2$

Nalezněte průsečík přímek p a q v rovině

- $p : C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $q : B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$p: \; x = 1 - t, \quad y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$

$q: \; x = 2 + 3s, \quad y = 0 - s, \quad s \in \mathbb{R}$

$1 - t = 2 + 3s$

$1 - t = -s$

$2 + 3s = -s$

$2 = -4s, \quad s = -\frac{1}{2}$

$x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

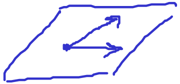
pro p: $x = 1 - t$, $y = 1 - t$ $\quad q$: $x = 2 + 3t$, $y = -t$

$1 - t = 2 + 3t$

$1 - t = -t \Rightarrow 1 = 0$

nejde

Rovnice roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$

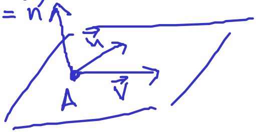


- $ax + by + cz = d$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- $\vec{x} = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, kde $t, s \in \mathbb{R}$,

  bod $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, směrové vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$,

  $$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n}$



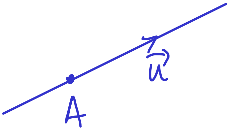
Rovnice přímky v prostoru

- $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{x} = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$,

  bod $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, směrový vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,



$$x = a_1 + tu_1$$
$$y = a_2 + tu_2$$
$$z = a_3 + tu_3$$

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p a q

$$p \; : \; A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q \; : \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p \cap q$? není

mimoběžky

p: $x = 1 + t$
$y = 2 + t$
$z = 3$

q: $x = 2 + s$
$y = 0 + s$
$z = 2 + s$

$1 + t = 2 + s$
$2 + t = s$
$\boxed{3 = 2 + s}$

$s = 1$

$2 + t = 1$, $t = -1$ nejde
$1 + t = 3$, $t = 2$

Nalezněte parametrickou rovnici přímky v $\mathbb{R}^3$, která je průníkem rovin

$\sigma\ : 3x + y + 3z = 7$

$\rho\ : \ 3x - 3y - 3z = 9$

$$3x + y + 3z = 7$$
$$6x - 2y = 16$$
$$3x - y = 8 \Rightarrow y = 3x - 8$$

$$3t + 3t - 8 + 3z = 7$$
$$3z = -6t + 15$$
$$z = -2t + 5$$

$$x = t$$
$$y = 3t - 8 \qquad , \quad t \in \mathbb{R}$$
$$z = -2t + 5$$

$$\sigma \cap \rho = p : \ A = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Početní příklady (soustavy v horním blokovém tvaru)

1. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23/6 \\ -3/4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 6x_3 &= 12 \end{aligned}$$

$3x_1 + \frac{3}{2} + 12 = 2,\ x_1 = -\frac{23}{6}$

$4x_2 + 8 = 5,\ x_2 = -\frac{3}{4}$

$x_3 = 2$

2. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{8}{3}t \\ \frac{5}{4} - t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$

$x_2 = \frac{5}{4} - t$

$3x_1 - 2(\frac{5}{4} - t) + 6t = 2$

$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{8}{3}t$

3. Vyřešte soustavu (v $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{3} + \frac{2}{3}t \\ t \\ 5 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

$x_3 = 5$

$3x_1 - 2x_2 = -28$

$x_2 = t$

$x_1 = \frac{-28 + 2t}{3}$

Pozorování: soustava v horním blokovém tvaru se řeší pohodlně

Převod na horní blokový tvar

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 &=& 16 \\ -x_1 + 2x_2 &=& -7 \end{array} \sim \begin{array}{rcll} 2x_1 - 5x_2 &=& 16 & \color{red}{R_1} \text{ řádek 1} \\ -2x_1 + 4x_2 &=& -14 & \color{red}{2R_2} \text{ dvojnásobek řádku 2} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{rcll} 2x_1 - 5x_2 &=& 16 & \color{red}{R_1} \\ 0x_1 - \ \ x_2 &=& 2 & \color{red}{R_2 + R_1} \end{array} \sim \begin{array}{rcll} 2x_1 - 5x_2 &=& 16 & \color{red}{R_1} \\ x_2 &=& -2 & \color{red}{-R_2} \end{array}$$

Takže: $x_2 = -2$, x_1 dopočítáme z první rovnice dosazením: $x_1 = 3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Podstata výpočtu = „manipulace s tabulkami“

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ -1 & 2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ -2 & 4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{2R_2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{R_2 + R_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -5 & 16 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \color{red}{R_1} \\ \color{red}{-R_2} \end{array}$$

Důležité: značení úprav budeme vždy vypisovat.

Povolené úpravy tabulek (tzv. elementární úpravy)

1. Prohození dvou řádků.
2. Vynásobení řádku nenulovým reálným číslem.
3. Přičtení jednoho řádku k jinému řádku.

Tyto úpravy lze „shlukovat“ (ovšem obezřetně). Například je možné nový třetí řádek nahradit řádkem tvaru $R_3 + 6R_1 - 7R_2$.

Pozorování

1. Elementární úpravy jsou vratné.
2. Elementární úpravy nemění řešení soustavy.
3. Po konečně mnoha elementárních úpravách dostaneme horní blokový tvar.

Důležité

Po úpravách může vyjít řádek samých nul (rovnice $0 = 0$).
Nulový řádek nebudeme ze soustavy vyškrtávat.
Soustava na začátku a na konci výpočtu musí mít stejný počet rovnic.