Lineární algebra

Natalie Žukovec

2020

$\mathrm{Span}\, M = \{\alpha_1(x+1) + \alpha_2 x + \alpha_3(x^2-x) + \alpha_4(3x^2+x+1),\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

$$M = \{\cancel{0}, \overbrace{x+1,\ x,\ x^2-x,\ 3x^2+x+1}^{\text{je LZ}}\}$$

$2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

je LZ/LN

$\alpha_1(x+1) + \alpha_2 x + \alpha_3(x^2-x) + \alpha_4(3x^2+x+1) = 0$

$x^2(\underbrace{\alpha_3+3\alpha_4}_{=0}) + x(\underbrace{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4}_{=0}) + (\underbrace{\alpha_1+\alpha_4}_{=0}) = 0 = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$

$$\begin{cases} x^2: & \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ x: & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ x^0: & \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_3 = -3\alpha_4$

$\alpha_1 = -\alpha_4$

$\alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 1 - 3 - 1 = -3$

$\alpha_4 = 1 \quad \frac{1}{2},\ -1000$

$\alpha_1 = -1$

$\alpha_3 = -3$

$-(x+1) - 3x - 3(x^2-x) + (3x^2+x+1) = 0$

$$\exists N : N \subseteq M, \ N \neq M \qquad ?$$

$$\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$$

$$N = \{x+1, x, x^2 - x\}$$

$$3x^2 + x + 1 = \underbrace{(x+1) + 3x + 3(x^2 - x)}$$

Lineární obal množiny vektorů M

L nad F

$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq L$

$$\operatorname{span} M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha_1 \dots \alpha_n \in F,\ x_1 \dots x_n \in M \right\}$$

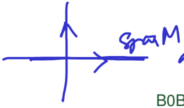
pokud $M \neq \emptyset$

$\vec{v} \in \operatorname{span} M$ $\overset{\Rightarrow}{\text{iff}}$ $M \cup \{\vec{v}\}$ je LZ

$\Rightarrow$ $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, pak $\vec{0} = \underbrace{\vec{v} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}_{\text{netriv komb.}}$

$\cancel{\Leftarrow}$ $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad M \cup \{\vec{v}\} = \left\{ \underset{-2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ je LZ

$L = \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



ale $\vec{v} \notin \operatorname{span} M$

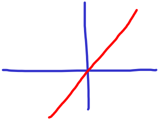
Lineární podprostor W prostoru L

$W \subseteq L$

$\operatorname{span} W = W$

nebo

1) $\vec{0} \in W$
2) pokud $x, y \in W$, pak $x+y \in W$
3) pokud $x \in W$, $\alpha \in F$ pak $\alpha x \in W$

$\mathbb{R}^2$  , $\mathbb{R}^2$, $\{\vec{o}\}$

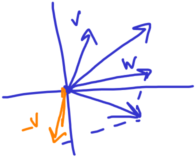
V rovině je pevně zvolena kartézká souřadná soustava a předpokládáme, že počátek každého vektoru je v počátku této soustavy. Zjistěte, zda následující množiny vektorů v rovině tvoří lineární prostor.

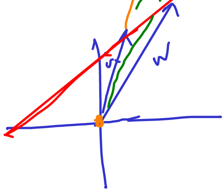
a) Všechny vektory, jejichž konce leží na dané přímce.

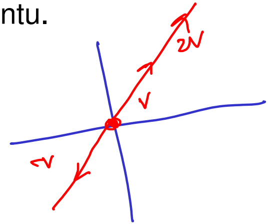
NE b) Všechny vektory v prvním kvadrantu. není podprostor

c) Všechny vektory v prvním nebo třetím kvadrantu. je p.p.

NE







Rozhodněte, zda množina M je podprostorem $\mathbb{R}^3$. ANO

$$M = \{ \begin{pmatrix} x+2y \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} ; \ x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

1. $\vec{o} \in M$? pro $x,y=0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$

2. $\underline{v, w \in M}$ pak $v+w \in M$?

$v = \begin{pmatrix} x+2y \\ y+1 \\ 2x+y \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} x'+2y' \\ y'+1 \\ 2x'+y' \end{pmatrix}$

$$v+w = \begin{pmatrix} x+x' + 2(y+y') \\ y+y' + 2 \\ 2(x+x') + y+y' \end{pmatrix} \overset{?}{\in} M \qquad \begin{aligned} x_1 &= x+x' \\ y_1 &= y+y' \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ y_1 + 2 \\ 2x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha(x+2y) \\ \alpha y \\ \alpha(2x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + 2\alpha y \\ \alpha y \\ 2\alpha x + \alpha y \end{pmatrix} \overset{?}{\in} M \qquad \begin{aligned} x_2 &= \alpha x \\ y_2 &= \alpha y \end{aligned}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Rozhodněte, zda množina N je podprostorem $\mathbb{R}^3$. NE

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 1 \\ 2x + y \end{pmatrix} ; \; x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N$? $x = y = 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 1 \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x + 2y = 0$
$y + 1 = 0$
$2x + y = 0$

$x = 2$
$y = -1$
$2 \cdot 2 - 1 = 0$?!
$3 = 0$!!

Rozhodněte, zda množina K je podprostorem $\mathbb{R}^3$. NE

$$K = \{ \begin{pmatrix} x + 2y \\ x^2 + y \\ 2x + y \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

$x_1^2 = (x+x')^2 = x^2 + 2xx' + (x')^2$

1. pro $x = y = 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ x^2+y \\ 2x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+2y' \\ (x')^2+y' \\ 2x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' + 2(y+y') \\ x^2+(x')^2 + y+y' \\ 2(x+x') + y+y' \end{pmatrix}$$

$x_1 = x + x'$

$y_1 = y + y'$

$P(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ $\quad a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

$\deg P(x) = n, \quad a_n \neq 0$

Rozhodněte, zda množina $\mathbb{R}^{=5}[x]$ je podprostorem $\mathbb{R}[x]$, NE

kde $\mathbb{R}^{=5}[x]$ je množina všech polynomů stupně přesně 5.

$a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$a_5 \neq 0$

1. $0 = 0 \cdot x^5 + \dots \notin \mathbb{R}^{=5}[x]$

2. $(x^5 + 2x^2) + (-x^5 + x^3) = x^3 + 2x^2$

3. $\alpha = 0 \qquad 0 \cdot (x^5 + 2x^2) = 0$

Rozhodněte, zda množina $\mathbb{R}^{=5}[x]$ je podprostorem $\mathbb{R}[x]$,

kde $\mathbb{R}^{=5}[x]$ je množina všech polynomů stupně přesně 5.

Rozhodněte, zda množina $\mathbb{R}^{\leq 5}[x]$ je podprostorem $\mathbb{R}[x]$,

kde $\mathbb{R}^{\leq 5}[x]$ je množina všech polynomů stupně maximálně 5.

L nad F $\quad M \subseteq L \quad M = \{x_1, x_2, \dots\}$

Množina generátoru lineárního prostoru

$\operatorname{span} M = L$

(Uspořádaná) báze lineárního prostoru

$B = (x_1, x_2, \dots x_n) \subseteq L$

1. $\operatorname{span} B = L$
2. B je LN

Dimenze lineárního prostoru $\quad \dim L = n$

$\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ $\quad \dim \mathbb{R}^2 = 2$, báze $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

Báze a dimenze $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. jsou tělesa

$\mathbb{C}$ $\mathbb{F}$

$\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ báze $B = (1)$

$\mathbb{F}$ nad $\mathbb{F}$

$\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ báze $B = (1, i)$

$B_1 = (1, 2i)$

$B_2 = (1, 1+i)$

$a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

$\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

LN $1, \sqrt{2}, \pi, e, \dots$

$\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ nad $\mathbb{R}$ $\dim \mathbb{R}^{\leq 2}[x] = 3$

$ax^2 + bx + c$ $B = (x^2, x, 1)$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

M je podprostor $\mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim M \leq 3$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Báze a dimenze $M = \left\{ \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ nad $\mathbb{R}$.

Báze M je $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\dim M = 2$

$\forall v \in M \qquad v = \begin{pmatrix} x+2y \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x, y \in \mathbb{R}$