Lineární algebra

Natalie Žukovec

2020

6. CVIČENÍ

Matice

$$i\begin{pmatrix} \text{———} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | \\ j \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} a_{ij} \\ j \end{pmatrix}$$

Spočtěte $\boxed{A+B,\ -A,\ A^T}$, AB, BA pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{AB \neq BA}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad 3\times 3 \quad BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A je typu $n \times \underline{m}$
B je typu $\underline{m} \times p$

AB je $n \times p$
BA není def. pro $n \neq p$

A je $n \times m$

B je $m \times n$

AB je $n \times n$

BA je $m \times m$

$\underline{\underline{m \neq n}}$

$\rightarrow AB \neq BA$

$(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

A je $m \times n$

A^T je $n \times m$

Spočtěte $A + B$, $-A$, A^T, AB, BA pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1×3 $\qquad$ 3×1

$A+B$ nejde

$-A = (-1, 0, -5)$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$1\times 3 \quad 3 \times 1 \qquad 1 \times 1$

$AB = 4 + 0 + 15 = 19$

$BA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ -2 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & +15 \end{pmatrix}$

$3 \times 1 \quad 1 \times 3$

BA je 3×3

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E_2 A = A E_2 = A, \quad X_3 A = A X_3 = O_2$

2×2

X

$\boxed{AX = XA}$

Určete všechny matice, které komutují s maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$\cancel{X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ $\qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha X_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $\qquad AX = \begin{pmatrix} 2x - z & 2y - t \\ 3x - z & 3y - t \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$x, y, z, t \in \mathbb{R}$ $\qquad XA = \begin{pmatrix} 2x + 3y & -x - y \\ 2z + 3t & -z - t \end{pmatrix}$

$$\cancel{2x} - z = \cancel{2x} + 3y$$
$$2y - t = -x - y$$
$$3x - z = 2z + 3t$$
$$3y - \cancel{t} = -z - \cancel{t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= -3y \\ t &= x + 3y \end{aligned}}$$
$$3t = 3x - 3z = 3x + 9y$$
$$z = -3y$$

$$K = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ -3y & x+3y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

báze K je $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \right)$

$\dim K = 2$

$(0, x_1, x_2)$ LZ
$\alpha \quad 0 \quad 0$

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -3y & 3y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

báze $Mat_{2\times 2}$ $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

$\dim Mat_{2\times 2} = 4$

Určete všechny matice, které komutují s maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Najděte bázi a dimenzi lineárního prostoru všech matic komutujicích s matici A.

$Mat_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}$ nad $\mathbb{R}$

$K \subseteq Mat_{2\times 2}$ je podprostr

1. $0 \in K$ $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$ ✓
2. $\forall B, C \in K$ platí $B + C \in K$ ✓
3. $\forall B \in K, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí $\alpha B \in K$

$$A(B+C) \underset{\text{distrib}}{=} AB+AC \overset{\checkmark}{=} BA+CA \underset{\text{distrib.}}{=} (B+C)A$$

$$\underline{AB=BA}$$
$$AC=CA$$

$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = \alpha(BA) = (\alpha B)A$$

Lineární zobrazení

$f: L_1 \to L_2$

L_1, L_2 jsou lin. prostory nad F

1) $\forall u, v \in L_1$ $\quad f(u+v) = f(u) + f(v)$

2) $\forall u \in L_1$, $\forall \alpha \in F$ $\quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

$\alpha_i \in F, x_i \in L_1$

Jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení.

$\ker f = \{u \in L_1 \mid f(u) = \vec{0}\} \subseteq L_1$

$\operatorname{Im} f = \{f(u) \mid u \in L_1\} \subseteq L_2$

podprostory

$\operatorname{def} f = \dim(\ker f)$ $\quad \operatorname{rank} f = \dim(\operatorname{Im} f)$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^3 \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$

$L_1 = L_2 = F = \mathbb{R} \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} R \\ S \\ T \end{pmatrix}$

Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení určené předpisem

$$f(u) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v) = \begin{pmatrix} 3R + S \\ 2T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení. Určete jeho jádro a obraz.

$$f(u+v) = f\begin{pmatrix} x+R \\ y+S \\ z+T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+R) + (y+S) \\ 2(z+T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overset{?}{\parallel}$

$$f(u) + f(v) = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3R+S \\ 2T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y+3R+S \\ 2z+2T \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha u) = f\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\\ \alpha z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\alpha x + \alpha y\\ 2\alpha z\\ 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}3x+y\\ 2z\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha f(u)$$

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \vec{0}\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underline{\begin{pmatrix}3x+y\\ 2z\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\ -3x\\ 0\end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$3x+y=0 \qquad y=-3x$$
$$2z=0 \qquad z=0$$
$$0=0$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}x\\ -3x\\ 0\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{def} f = \dim \ker f = 1$$

$$\operatorname{Im} f = \{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3x+y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f = 2$$

Matice lin. zobr. f vzhledem k bázi

$f: \underbrace{\mathbb{R}^3}_{L_1} \to \underbrace{\mathbb{R}^3}_{L_2}$

$K_3 = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right)$

$M_f = \left(\mathrm{coord}_{K_3} f(e_1), \mathrm{coord}_{K_3} f(e_2), \mathrm{coord}_{K_3} f(e_3) \right)$ $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=1$, $y=z=0$ $\qquad$ $x=z=0$, $y=1$ $\qquad$ $x=y=0$, $z=1$

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

B je báze $L_1 = \mathbb{R}^3$

C je báze $L_2 = \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{coord}_C \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$M_{BC}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{coord}_B u} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x+y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coord}_C f(u)}$$

$L_1 \quad L_2$ nad $\mathbb{R}$

Nechť $G : Mat_{2x2} \to \mathbb{R}$ je zobrazení určené předpisem

$\dim Mat_{2x2} = 4$

$\dim \mathbb{R} = 1$

$$G\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$$

Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení. Určete jeho jádro a obraz.

$\operatorname{Im} G = \{ a+b+c+d \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2x2} \}$

$\cap$

$\mathbb{R} \quad = \{ a+b+c+d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

$\operatorname{rank} G = 1$

Věta o dimenzi jádra a obrazu

$$\underbrace{\dim \ker G}_{=3} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} G}_{=1} = \underbrace{\dim \mathrm{Mat}_{2\times 2}}_{=4}$$

$$\ker G = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{jsou LN}}\right)$$

$G\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b+c+d = 0$, $d = -a-b-c$

a, b, c jsou param.

Mějme $f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.
Dokažte, že existuje právě jedno lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ s těmito předpisy.

Zjistěte jaké je jeho jádro a obraz.

Určete hodnotu $f\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ a

najděte všechna $v \in \mathbb{R}^3$ pro která $f(v) = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Spočtěte jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení

$der : \mathbb{R}^{\leq 4}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 4}[x]$

$(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \mapsto (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)$

Matice lineárního zobrazení

Najděte matici lin.zobrazení *der* vzhledem

- k bázi $B = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$,
- k bázi $C = (1, x, x^2, x^3, x^4)$,
- k bázím $D = ((x-2)^4, (x-2)^3, (x-2)^2, (x-2), 1)$ a $B = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$.

Najděte matici $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$$

- vzhledem k $B = (\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})$ a $K_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$,
- vzhledem k B a $C = (\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix})$.

Zadejte maticemi:

- změnu měřítka (a-krát na ose x, b-krát na ose y), $M_{a,b}$,
- projekce na osy, P_x, P_y,
- rotaci o úhel α, R_α.