Matematická analýza 2

Natalie Žukovec

13. cvičení 2021

Složkové vyjádření pro integrály vektorového pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Křivkový

$$\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = \int_{(C)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Plošný

$$\iint_{(M)} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{(M)} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$$

Pomocí Gaussovy věty vypočítejte $\iint_{(M)} xzdydz + xydzdx + yzdxdy$, kde M je povrch jehlanu omezeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. Orientace je dána vnějším normálovým polem.

$\vec{F} = (xz, xy, yz)$, $\iint_{(M)} \vec{F}\, d\vec{S} = \iiint_{jehlan} div\vec{F} = \frac{1}{8}$

Pomocí Gaussovy věty vypočítejte $\iint_{(T)} xzdydz + xydzdx + yzdxdy$, kde T je trojúhelník $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Orientace je směrem vzhůru.

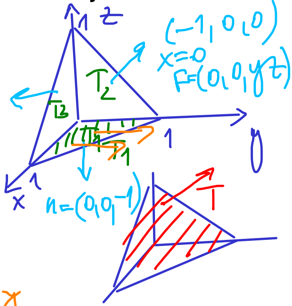
$$\underbrace{\iint_{(M)} \vec{F}\, d\vec{S}}_{=\frac{1}{8}} = \underbrace{\iint_{(T)} \vec{F}\, d\vec{S}}_{?=\frac{1}{8}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \iint_{(T_i)} \vec{F}\, d\vec{S}}_{=0}$$

$$\iint_{(T_1)} \vec{F}\, d\vec{S} = 0$$

$n = (0, 0, -1)$

pro T_1, $z = 0$

$\vec{F}_{T_1} = (0, xy, 0)$ ve směru osy y



Bez Gaussovy věty $\iint_{(T)} \vec{F} d\vec{S}$ k rovině $x+y+z=1$ normála $\vec{n}=(1,1,1)$

Parametrizace T: $\Phi(x,y)=(x,y,1-x-y)$, $x,y\in T_1$

$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=(1,0,-1)$ $\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}=(1,1,1)$

$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=(0,1,-1)$

$$\iint_{(T)} \vec{F} d\vec{S}=\int_0^1\int_0^{1-x}(x(1-x-y),xy,y(1-x-y))\cdot(1,1,1)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x-x^2-xy+xy+y-xy-y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}(x(1-x)+y(1-x)-y^2)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left[x(1-x)y+(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x(1-x)^2+\frac{(1-x)^3}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=$$

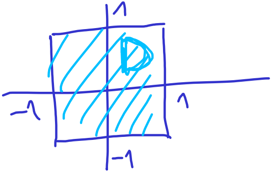
$((x-1)+1)(1-x)^2$

$(1-x)^2-(1-x)^3$ $\qquad -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}$

$$=\int_0^1\left((1-x)^2-\frac{5}{6}(1-x)^3\right)dx=\left[-\frac{(1-x)^3}{3}+\frac{5}{6}\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{5}{6\cdot4}=\frac{8-5}{6\cdot4}=\frac{1}{8}$$

$\vec{F} = (y^2, x)$

Pomocí Greenovy věty vypočtěte $\int_{(C)} y^2 dx + x dy$, kde C je kladně orientovaná hranice čtverce $\langle -1, 1 \rangle^2$.



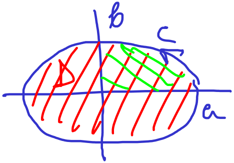
$$\boxed{\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\int_{-1}^{1} (1-2y)\, dx}_{\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2}\, dy = 2 \int_{-1}^{1} (1-2y)\, dy =$$

$$= 2 \left[y - y^2 \right]_{-1}^{1} = 4$$

$1-(-1)$

Nalezněte obsah oblasti omezené elipsou s poloosami a, b.



- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, pak $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. $x\in\langle 0,a\rangle$

- Dvojný integrál (substituce) $\iint_D 1$

$\Phi(\rho,\varphi)=(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)$, $\rho\in\langle 0,1\rangle$, $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$, $\Delta_\Phi=\rho\cdot ab$

- Plošný integrál (parametrizace) $\iint_D 1\,dS$

parametrizace D $\Phi(\rho,\varphi)=(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi,\ 0)$, $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right\|$

- Vhodnou volbou pole $\vec{F}$ zjistěte obsah množiny ohraničené kladně orientovanou křivkou s parametrizací $\varphi(t)=(a\cos t;b\sin t)$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle$.

$\int_{(C)}\vec F\,d\vec s=\iint_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=\iint_D 1$

$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=1$

$\vec F=(0,x)$ $\quad(-y,0)\quad$ $\frac{1}{2}(-y,x)$

$$\int_{(c)} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(0,\ a\cos t)}_{\vec{F}(\varphi)} \cdot \underbrace{(-a\sin t,\ b\cos t)}_{\varphi'}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\, dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\underbrace{\cos 2t}_{\pi\text{-period}})\, dt = ab\,\frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

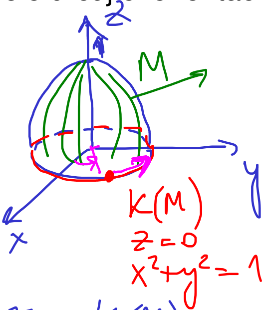
$$= \pi ab$$

$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$

$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$

Vypočtěte $\iint_{(M)} rot\vec{F}\, d\vec{S}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Normálové pole určující orientaci má nezápornou z-tovou složku.

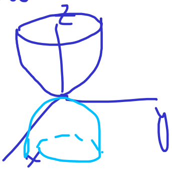
Stokes $\iint_{(M)} rot\vec{F}\, d\vec{S} = \int_{(K(M))} \vec{F}\, d\vec{s}$



rotační paraboloid

$z = x^2+y^2$

$z = -x^2-y^2$



parametrizace $K(M)$

$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi)$

$$\int_{(K(M))} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t, 0, \cos t)}_{\vec{F}(\varphi)} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t, 0)}_{\varphi'}\, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right) dt = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -\pi$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

Parametrizace M: $\varphi(x,y) = (x, y, 1-x^2-y^2)$, pro $x^2+y^2 \le 1$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1,0,-2x) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0,1,-2y)$$

$$\iint_{(M)} (-1,-1,-1)\, d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} (-1,-1,-1)(2x,2y,1) = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-2x-2y-1) =$$

$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$

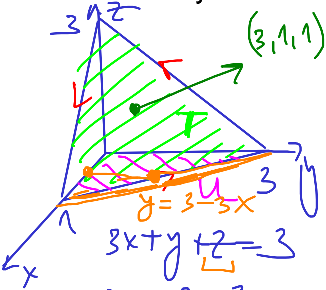
$0 \le \rho \le 1$

$0 \le \varphi < 2\pi$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{-2\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi}_{=0} - 1\Big) \underbrace{\rho}_{= J_\varphi}\, d\varphi\, d\rho = -\int_0^1 2\pi \rho\, d\rho =$$

$$= -2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\vec{F} = (xz, 2xy, 3xy)$ podel křivky C, která je obvodem trojúhelníka s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$. Orientace je určena uvedeným pořadím vrcholů.



$$\int_{(C)} \vec{F}\, d\vec{s} = \iint_{(T)} \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{S}$$

parametrizace $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$3x + y + \underbrace{z}_{} = 3$

$\Phi(x, y) = (x, y, 3 - 3x - y)$

$z = 3 - 3x - y$

$(x, y) \in U, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3 - 3x$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, -3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = (3x-0,\ -(3y-x),\ 2y-0)$$

$$\nabla\times F \qquad = (3x,\ x-3y,\ 2y)$$

$$\iint_{(T)} \operatorname{rot}\vec{F}\,ds = \int_0^1\int_0^{3-3x} (3x,\ x-3y,\ 2y)\cdot(3,1,1)\,dy\,dx$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\Phi)$$

$$= \int_0^1\int_0^{3-3x}(9x + x - 3y + 2y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{3-3x}(10x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[10xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{3-3x} dx = \int_0^1 10x(3-3x) - \frac{(3-3x)^2}{2}\,dx$$

$$= \left[30\frac{x^2}{2} - 30\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{(3-3x)^3}{3\cdot 2}\cdot\frac{-1}{3}\right]_0^1 = 15 - 10 - \frac{3^3}{2\cdot 3^2} =$$

$$= 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

f $\vec{F}$

Určete potenciály následujících vektorových polí v uvedených oblastech (existují-li)

$\vec{F} = \operatorname{grad} f$, $f \in C^1$

nutná podm. $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ v $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, zx)$ v $\mathbb{R}^3$;

2) $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$ v $\boxed{\mathbb{R}^3}$; $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3) $\vec{F}(x, y) = (y^2 \cos x, 2y \sin x)$ v $\mathbb{R}^2$. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ DÚ

1) $\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & zx \end{vmatrix} = \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(zx) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)}_{0}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(zx)}_{-z}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2)}_{0} \right)$

$\operatorname{rot} \vec{F} = (0, -z, 0) \neq (0, 0, 0)$

$\vec{F}$ není potenciální

2) $\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 - 2xz & 2yz - 2xy & y^2 - x^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y, -2x - (-2x), -2y - (-2y)) = (0, 0, 0)$

$$F = (\underline{F_1}, F_2, F_3) = \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad f = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{-y^2 - 2xz}_{F_1}, \quad f = -y^2 x - x^2 z + c(y,z), \quad c = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{-2yx} + \frac{\partial c}{\partial y} = \underbrace{2yz - \cancel{2xy}}_{F_2}, \quad c(y,z) = y^2 z + \tilde{c}(z)$$

$$f = -y^2 x - x^2 z + y^2 z + \tilde{c}(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cancel{-x^2} + \cancel{y^2} + \tilde{c}' = \underbrace{\cancel{y^2} - \cancel{x^2}}_{F_3}$$

$$\tilde{c}'(z) = 0,$$

$$\tilde{c}(z) = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

konst.

$$f = -y^2 x - x^2 z + y^2 z + \underline{\underline{K}}$$

pro 2)

$\operatorname{rot}\vec{F} = 0,$

1. Ověřte, že $\vec{F}$ je potenciální.

$$f = -y^2x - x^2z + y^2z + \underline{\underline{k}}$$

2. Nalezněte potenciál f pole $\vec{F}$ splňující $f(0,0,0) = 0$... $k = 0$

3. Spočtěte hodnotu $\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s}$ podél kladně orientované jednotkové kružnice C ležící v rovině xz a mající střed v počátku.

integrál potenciálního pole po uzavřené křivce je vždy nulový

4. Spočtěte hodnotu $\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s}$, kde C má parametrizaci $\varphi(t) = (1, t, t-2)$, $t \in \langle 0, 4 \rangle$.

$A = \varphi(0) = (1, 0, -2)$, $B = \varphi(4) = (1, 4, 2)$

$$\int_{(C)} \vec{F} d\vec{s} = f(B) - f(A) = 18 - 2 = 16$$

3) $\vec{F}=(y^2\cos x,\ 2y\sin x)$, $f=?$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2\cos x$, $f=y^2\sin x+C(y)$ $\boxed{f=y^2\sin x+k}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\cancel{\sin x}+c'=2y\cancel{\sin x}$, $c'(y)=0$, $c'(y)=k$, $k\in\mathbb{R}$