Tento text není samostatným studijním materiálem. Jde jen o prezentaci promítanou na přednáškách, kde k ní přidávám slovní komentář. Některé důležité části látky píšu pouze na tabuli a nejsou zde obsaženy.

Definice

Nechť f je funkce na množině $(a,b) \setminus D$, kde
$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Nechť pro $k = 1, \dots, n$ existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$.

Pak definujeme zobecněný Riemannův integrál f od a do b jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

pokud má tento součet smysl.

Pokud ano, řekneme, že integrál existuje.
Pokud je to vlastní číslo, řekneme, že integrál konverguje.

Věta

Jestliže f nezáporná po částech spojitá funkce na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak zobecněný Riemannův integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ buď konverguje nebo

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty.$$

Věta (srovnávací kritérium)

- Nechť $|f| \leq g$ na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, f je po částech spojitá na (a, b) a $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ konverguje. Pak konverguje také $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
- Nechť $f \leq g$ na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, g je po částech spojitá na (a, b) a $\int\limits_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Pak $\int\limits_a^b g(x)\,dx = +\infty$.
- Nechť $g \leq h$ na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, g je po částech spojitá na (a, b) a $\int\limits_a^b h(x)\,dx = -\infty$. Pak $\int\limits_a^b g(x)\,dx = -\infty$.

Tvrzení

- $\int\limits_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.
- $\int\limits_1^\infty x^\alpha \, dx$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

Tvrzení

Nechť P, Q jsou polynomy, Q je nenulový, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\int\limits_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ konverguje právě tehdy, když jsou splněny podmínky:

1) Pokud $\exists c \in \langle a, b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$: $\int\limits_a^b \frac{(x-c)^\alpha P_1(x)}{(x-c)^\beta Q_1(x)}\,dx$, kde

   $P_1(c) \neq 0$, $Q_1(c) \neq 0$, pak $\alpha \geq \beta$.

2) Jestliže $a = -\infty$ a/nebo $b = +\infty$, pak $st(Q) \geq st(P) + 2$.

Aplikace určitého integrálu

Definice

Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$.
Definujeme průměr neboli střední hodnotu f na $\langle a, b\rangle$ jako

$$\operatorname*{Ave}_{\langle a,b\rangle}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta o střední hodnotě

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení

Nechť f, g jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$ a $f \leq g$ na $\langle a, b\rangle$.
Obsah oblasti mezi grafy f a g na $\langle a, b\rangle$ je

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Tvrzení

Nechť má funkce f spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$.
Pak délka křivky dané grafem f na $\langle a, b\rangle$ je

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Tvrzení

Nechť f je nezáporná spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$,
Objem rotačního tělesa daného rotací grafu f na $\langle a, b\rangle$ okolo osy $y = 0$ je

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

Nechť má f navíc spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$.
Povrchový obsah pláště tohoto rotačního tělesa je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Posloupnosti reálných čísel

Definice

Posloupnost reálných čísel je libovolné zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Značíme $a(n) = a_n$, pak $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definice

Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti, $c \in \mathbb{R}$.
Definujeme jejich součet

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

a násobek konstantou

$$c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Definice

Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost.

Řekneme, že je shora omezená, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n$ platí $a_n \le K$.

Řekneme, že je zdola omezená, jestliže $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall n$ platí $a_n \ge k$.

Řekneme, že je omezená, jestliže je shora i zdola omezená
(tedy $\exists k, K\ \forall n$ platí $k \le a_n \le K$).

Definice

Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost.

Řekneme, že je rostoucí, jestliže $\forall n$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Řekneme, že je neklesající, jestliže $\forall n$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Řekneme, že je klesající, jestliže $\forall n$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Řekneme, že je nerostoucí, jestliže $\forall n$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Řekneme, že je monotonní, jestliže má jednu z těchto čtyř vlastností.

Definice

Vybraná posloupnost z posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, kde $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Definice

Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud

$\forall$ okolí $U(a)$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ je $a_n \in U(a)$.

Řekneme také „a_n jde k a (pro n jdoucí do nekonečna)“.

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo $a_n \to a$ (pro $n \to \infty$).

Pokud takové a najdeme, řekneme, že limita existuje,
jinak řekneme, že limita neexistuje.

Pokud $a \in \mathbb{R}$, pak posloupnost je konvergentní,
pokud $a = \pm\infty$, pak posloupnost je divergentní.

Poznámka

Definice řika, že jen konečně mnoho členů posloupnosti neleží v $U(a)$ (nektere z a_n, $n \leq n_0$).

„Epsilon–delta“ verze definic:

$$a_n \to a \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \text{ je } |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$a_n \to \infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n > K.$$

$$a_n \to -\infty \iff \forall k \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n < k.$$