Tento text není samostatným studijním materiálem. Jde jen o prezentaci promítanou na přednáškách, kde k ní přidávám slovní komentář. Některé důležité části látky píšu pouze na tabuli a nejsou zde obsaženy.

Definice

Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud

$\forall\ U(a)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \geq n_0\ \text{ je }\ a_n \in U(a).$

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo $a_n \to a$ (pro $n \to \infty$).

Poznámka

Definice řika, že jen konečně mnoho členů posloupnosti neleží v $U(a)$ (nektere z a_n, $n \leq n_0$).

Změna konečně mnoha členů posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu její limity.

„Epsilon–delta“ verze definic:

$$a_n \to a \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0 \text{ je } |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$a_n \to \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n > K.$$

$$a_n \to -\infty \iff \forall k \in \mathbb{R}\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_0 \text{ je } a_n < k.$$

Věta

Posloupnost má limitu a právě tehdy, když každá z ní vybraná posloupnost má limitu a.

Věta

Pokud limita posloupnosti existuje, pak je jediná.

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta

- Každá monotonní posloupnost má limitu.
  Pokud $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je neklesající, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.
  Pokud $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$.
- Pokud je posloupnost monotonní a omezená, pak konverguje.

Věta (limita a operace)

Nechť $a_n \to a$ a $b_n \to b$. Pak existují i následující limity:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$,

pokud mají pravé strany smysl.

Věta (limita a srovnání)

Nechť posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ splňují $a_n \to a$, $b_n \to b$.

- Jestliže $\exists\ n_0$ takové, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$, pak $a \leq b$.
- Jestliže $a < b$, pak $\exists\ n_0$ takové, že $a_n < b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Věta (limita a srovnání)

Nechť pro posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existuje n_0 takové, že $a_n < b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

- Jestliže $a_n \to \infty$, pak také $b_n \to \infty$.
- Jestliže $b_n \to -\infty$, pak také $a_n \to -\infty$.

Věta o sevření

Nechť pro posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existuje n_0 takové, že splňují $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Jestliže $a_n \to a$, $c_n \to a$, pak také $b_n \to a$.

Věta o sevření s absolutní hodnotou

Nechť pro posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existuje n_0 takové, že splňují $|a_n| \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Jestliže $b_n \to 0$, pak také $a_n \to 0$.

Definice

Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá jejím hromadným bodem, jestliže každé okolí $U(a)$ obsahuje nekonečně mnoho členů a_n.

Věta

- Limita posloupnosti je hromadným bodem dotyčné posloupnosti.
- Hromadný bod posloupnosti je limitou některé vybrané posloupnosti.

Důsledek

Má-li posloupnost aspoň dva různé hromadné body, pak nemá limitu.

Věta

- Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod v $\overline{\mathbb{R}}$.
- Každá omezená posloupnost má alespoň jeden vlastní hromadný bod.

Věta

Posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu právě tehdy, když

má jediny hromadny bod, tj. právě tehdy, když

všechny z ní vybrané posloupnosti mají stejnou limitu.

Věta

Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí bodu a.

Pak $\lim_{x \to a} f(x) = b$ právě tehdy, když

$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ čísel z $D(f) \setminus \{a\}$: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$.

Poznámka

L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i pro posloupnosti.

Jestliže pro $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ najdeme funkci f, pro kterou

$f(n) = a_n$ pro každé (dostatečně velké) $n \in \mathbb{N}$

a pro kterou existuje $\lim_{x \to \infty} f(x)$, pak platí $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} f(x)$.