Tento text není samostatným studijním materiálem. Jde jen o prezentaci promítanou na přednáškách, kde k ní přidávám slovní komentář. Některé důležité části látky píšu pouze na tabuli a nejsou zde obsaženy.

Aplikace derivací

- rovnice tečny a normály grafu funkce,
- l'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit funkcí,
- Taylorův polynom.

Věta (Rolleova věta)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$

a diferencovatelná na jeho vnitřku (a, b).

Jestliže $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$: $f'(c) = 0$.

Věta (Věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$

a diferencovatelná na jeho vnitřku (a, b).

Pak existuje $c \in (a, b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důsledek

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$

a diferencovatelná na jeho vnitřku (a, b).

Jestliže $f' = 0$ na (a, b), pak je f konstantní na $\langle a, b\rangle$.

Důsledek

- Nechť f je funkce spojitá v a zprava a diferencovatelná na nějakém pravém prstencovém okolí a. Pak $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$, pokud limita konverguje.
- Nechť f je funkce spojitá v a zleva a diferencovatelná na nějakém levém prstencovém okolí a. Pak $f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$, pokud limita konverguje.

Věta (Cauchyova věta)

Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$

a diferencovatelné na jeho vnitřku (a, b).

Jestliže $g' \neq 0$ na (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Věta (l'Hôpitalovo pravidlo, l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť f, g jsou funkce diferencovatelné na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Předpokládejme, že buď $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

nebo $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Jestliže $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje, pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Použití l'Hospitala na další typy:

- $0 \cdot \infty$: převod na podíl:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \qquad \text{nebo} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

- 1^{∞}, 0^0, ∞^0: převod na součin pomocí triku pro obecnou mocninu:

$$1^{\infty} = e^{\infty \ln(1)} = e^{\infty \cdot 0},$$

$$0^0 = e^{0 \ln(0)} = e^{0 \cdot \infty},$$

$$\infty^0 = e^{0 \ln(\infty)} = e^{0 \cdot \infty}.$$

- $\infty - \infty$: převod na součin, často vytknutím.

Definice

Nechť má funkce f v bodě a n-tou derivaci.
Definujeme její Taylorův polynom stupně n se středem v a jako

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definujeme také zbytek

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad \text{pro } x \in D(f).$$

Tvrzení

Nechť má funkce f v bodě a n-tou derivaci,

nechť T_n je její Taylorův polynom stupně n se středem v a.

Pak T_n je jediný polynom stupně n, který má s f shodné derivace do řádu n v bodě a, tj.

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \text{ pro } k = 0, \ldots, n.$$

Věta (Taylorova věta)

Nechť má funkce f v bodě a n-tou derivaci,
uvažujme její Taylorův polynom stupně n se středem v a.

Nechť x je takové, že funkce f je definována na $\langle a, x\rangle$,
má spojité derivace až do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x\rangle$ a
$f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě intervalu (a, x).
Pak existuje $c \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(tzv. Lagrangeův tvar zbytku)

Podobně zleva pro interval $\langle x, a\rangle$.

Fakt

- e^x, $a = 0$: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\sin(x)$, $a = 0$: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
- $\cos(x)$, $a = 0$: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
- $\ln(1+x)$, $a = 0$: $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
- $\ln(x)$, $a = 1$:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots$$

Průběh funkce

- intervaly monotonie, (lokální) extrémy,
- konvexita, konkavita, inflexní body,
- asymptoty grafu.

Věta (o monotonii funkce)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu I
a diferencovatelná v každém vnitřním bodě I.

- Jestliže je $f' > 0$ uvnitř I, pak je f rostoucí na I.
- Jestliže je $f' \geq 0$ uvnitř I, pak je f neklesající na I.
- Jestliže je $f' < 0$ uvnitř I, pak je f klesající na I.
- Jestliže je $f' \leq 0$ uvnitř I, pak je f nerostoucí na I.

- Jestliže je f neklesající na I, pak je $f' \geq 0$ uvnitř I.
- Jestliže je f nerostoucí na I, pak je $f' \leq 0$ uvnitř I.

Definice

Řekneme, že funkce f je rostoucí v bodě a, pokud existuje okolí $U(a) \subset D(f) : \forall x, y \in U(a),\ \ x < a < y$ je $f(x) < f(a) < f(y)$.

Řekneme, že funkce f je klesající v bodě a, pokud existuje okolí $U(a) \subset D(f) : \forall x, y \in U(a),\ \ x < a < y$ je $f(x) > f(a) > f(y)$.

(analogicky funkce neklesající a nerostoucí v bodě)

Fakt

Funkce f je rostoucí na intervalu (a, b) právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.
(Analogicky i pro ostatní typy monotonie.)

Tvrzení

Je-li $f'(a) > 0$, pak je funkce f rostoucí v bodě a.

Je-li $f'(a) < 0$, pak je funkce f klesající v bodě a.

Definice

Řekneme, že funkce f nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého globálního maxima K v bodě a, jestliže

$$a \in M,\ f(a) = K \text{ a pro každé } x \in M \text{ platí } f(x) \leq f(a).$$

Řekneme, že funkce f nabývá na množině $M \subset D(f)$ svého globálního minima k v bodě a, jestliže

$$a \in M,\ f(a) = k \text{ a pro každé } x \in M \text{ platí } f(x) \geq f(a).$$

Globální maximum a globální minimum jsou globální extrémy.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu a.

Řekneme, že f má v bodě a lokální maximum,
popř. že $f(a)$ je lokální maximum, jestliže

$$\exists\, U(a) \ :\ f(x) \leq f(a) \text{ pro } \forall\, x \in U(a).$$

Řekneme, že f má v bodě a lokální minimum,
popř. že $f(a)$ je lokální minimum, jestliže

$$\exists\, U(a) \ :\ f(x) \geq f(a) \text{ pro } \forall\, x \in U(a).$$

Lokální maximum a lokální minimum jsou lokální extrémy.

Ostrý extrém ... ostrá nerovnost pro $x \neq a$.

Věta

Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$.

Postačující podmínkou je vhodna změna monotonie.

Definice

Bod a se nazývá stacionární bod funkce f, pokud $f'(a) = 0$.

Věta

Nechť a je stacionární bod funkce f.
Jestliže $f''(a) > 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální minimum.
Jestliže $f''(a) < 0$, pak $f(a)$ je ostré lokální maximum.