Tento text není samostatným studijním materiálem. Jde jen o prezentaci promítanou na přednáškách, kde k ní přidávám slovní komentář. Některé důležité části látky píšu pouze na tabuli a nejsou zde obsaženy.

Průběh funkce

- intervaly monotonie, (lokální) extrémy,
- konvexita, konkavita, inflexní body,
- asymptoty grafu.

Úloha: Určete maximální intervaly monotonie funkce
a její lokální extrémy.

Algoritmus:

1) Základ: intervaly $D(f)$.

2) Najít stacionární body a body, kde derivace neexistuje;
základní intervaly se tak rozdělí na intervaly monotonie.

3) Zjistit znaménko f' na intervalech z 2).

4) Dle znamének usoudit na monotonii, zamyslet se
nad možností spojit intervaly. Závěr.

5) Dle tvaru funkce usoudit na lokální extrémy, najít jejich hodnoty.

Věta

Má-li funkce f v bodě a globální extrém na intervalu I,
pak buď v a je lokální extrém f nebo a je krajní bod I.

Víme

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svých globálních extrémů.

Úloha: Najít globální extrémy spojité funkce f na uzavřeném intervalu I.

Algoritmus:

1) Najít stacionární body funkce f a body ve kterých f nemá derivaci.

2) Sestavit množinu kandidátů na extrém:
   - stacionární body ležící v I,
   - body I ve kterých f nemá derivaci,
   - krajní body I.

3) Dosadit kandidáty do f, porovnat hodnoty; závěr.

Pro (polo)otevřený interval: limity funkce v krajních bodech,
zjistime tak $\sup$ ($\inf$) hodnot funkce.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na intervalu I.

Řekneme, že f je konvexní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y, z \in I : x < y < z \text{ platí } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Řekneme, že f je konkávní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y, z \in I : x < y < z \text{ platí } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ryze konvexní/ konkávní ... ostrá nerovnost.

Věta

Nechť f je funkce spojitá na I a dvakrát diferencovatelná uvnitř I.

- Jestliže $f'' > 0$ uvnitř I, pak je f ryze konvexní na I.
- Jestliže $f'' \geq 0$ uvnitř I, pak je f konvexní na I.
- Jestliže $f'' \leq 0$ uvnitř I, pak je f konkávní na I.
- Jestliže $f'' < 0$ uvnitř I, pak je f ryze konkávní na I.

Definice

Řekneme, že bod $[a, f(a)]$ je inflexním bodem grafu funkce f (funkce f má v bodě a inflexi), jestliže

f přechází v a z ryze konvexní na ryze konkávní nebo naopak

f je v a spojitá a diferencovatelná.

Věta

Jestliže f má v bodě a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.

Jestliže $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$, pak funkce f má v bodě a inflexi.

Algoritmus pro hledání intervalů konvexity:

1) Základ: intervaly $D(f)$.

2) Najít body $D(f)$, kde $f''(a) = 0$ nebo $f''(a)$ neexistuje;
základní intervaly se tak rozdělí na intervaly konvexity.

3) Zjistit znaménko f'' na intervalech z 2).

4) Dle znamének usoudit na konvexitu, inflexní body. Závěr.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na nějakém jednostranném prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.
Řekneme, že přímka $x = a$ je svislá asymptota f, nebo
že f má svislou asymptotu v a, jestliže

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Poznámka

Pokud f má svislou asymptotu v a, pak a je hraniční bod $D(f)$ nebo bod nespojitosti.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na okolí ∞.
Řekneme, že přímka $y = q$ je vodorovná asymptota f v ∞,
jestliže $\lim_{x \to \infty} f(x) = q$.

Nechť f je funkce definovaná na okolí $-\infty$.
Řekneme, že přímka $y = q$ je vodorovná asymptota f v $-\infty$,
jestliže $\lim_{x \to -\infty} f(x) = q$.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na okolí ∞.

Řekneme, že přímka $y = px + q$ je šikmá asymptota f v ∞, jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (px + q)\big) = 0$.

Nechť f je funkce definovaná na okolí $-\infty$.

Řekneme, že přímka $y = px + q$ je šikmá asymptota f v $-\infty$, jestliže $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (px + q)\big) = 0$.

Věta

Nechť f je funkce definovaná na okolí ∞.

Přímka $y = px + q$ je asymptota f v ∞ tehdy a jen tehdy, když

$$p = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to \infty} \big(f(x) - px\big).$$

Nechť f je funkce definovaná na okolí $-\infty$.

Přímka $y = px + q$ je asymptota f v $-\infty$ tehdy a jen tehdy, když

$$p = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - px\big).$$

Algoritmus pro hledání asymptot:
Vodorovné, šikmé: Je-li f definována na okolí ∞:
1) Najdeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}$ ... přímka $y = p$ je vodorovná asymptota f v ∞.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje ... není v ∞ asymptota.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ ... jdeme dále, může být šikmá asymptota.

2) Pokud $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = p \in \mathbb{R}$, jdeme dál, může být šikmá asymptota.
Jinak šikmá asymptota v ∞ není.
3) Pokud $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - px\big) = q \in \mathbb{R}$, je v ∞ asymptota $y = px + q$.
Jinak tam už definitivně žádná asymptota není.

Je-li f definována na okolí $-\infty$: Stejný postup, ale v $-\infty$.

Algoritmus pro **průběh funkce**:

1) $D(f)$, spojitost, průsečíky s osami, symetrie a periodicita; limity v krajních bodech intervalů $D(f)$, asymptoty.

2) f', monotonie a lokální extrémy.

3) f'', konvexita a inflexní body.

4) Obrázek.

Neurčitý integrál

Definice

Nechť f je funkce na intervalu I.
Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I, jestliže je F spojitá na I, diferencovatelná uvnitř I a $F' = f$ uvnitř I.

Věta

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I.

- $\forall c \in \mathbb{R}$ funkce $F(x) + c$ je primitivní funkce k f na I.
- Nechť G je jiná primitivní funkce k f na I.
  Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $G(x) = F(x) + c$ na I.

Definice

Nechť f je funkce, která má na intervalu I primitivní funkci.

Definujeme neurčitý integrál f na I jako množinu všech primitivních funkcí k f na I.

Značení:

$$\int f(x)\,dx = \{F;\ F \text{ je primitivní funkce k } f \text{ na } I\}.$$

Jestliže máme jednu takovou primitivní funkci F, pak nepřesně ale tradičně píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ x \in I.$$

Věta

Nechť F je funkce, která má na intervalu I derivaci.
Pak tato derivace splňuje vlastnost mezihodnoty na I.

$F' = f$ na I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$.
Pak existuje bod c mezi a, b tak, že $f(c) = d$.

Důsledek

Nechť f je funkce na intervalu I.
Jestliže tato funkce nesplňuje vlastnost mezihodnoty na I, pak nemůže mít primitivní funkci na I.

Věta

Jestliže je funkce spojitá na intervalu, pak na něm má primitivní funkci.

(Důkaz po zavedení určitého integrálu)

Příklad

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Fakt

Primitivní funkce k

$$e^{-x^2},\ \sin(x^2),\ \cos(x^2),\ \frac{e^x}{x},\ \frac{\sin(x)}{x},\ \frac{\cos(x)}{x},\ \frac{1}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a algebraických operací či skládání.

Tabulkové integrály

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1,\ \text{podmínka dle } a;$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0;$$

$$\int e^x dx = e^x + C,\ x \in \mathbb{R};$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ x \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \; x \in \mathbb{R};$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \; x \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \; x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \; x \neq k\pi;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \; x \in (-1, 1);$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C, \; x \in \mathbb{R}.$$

Věta (linearita)

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci g na I, nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na I.

Zápis neurčitým integrálem:

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$