Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

1. cvičení 2021

Asymptotické chování funkcí

$c \in \mathbb{R}$

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné funkce.

$f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ $\exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \ f(n) \leq c\, g(n)$

$f(n) \in \Omega(g(n))$ $\exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \ f(n) \geq c\, g(n)$

$f(n) \in \Theta(g(n))$ $\exists c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$

$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$\Leftrightarrow$

Z defnice ukažte, že platí: $f(n) \in \Theta(g(n))$ iff $g(n) \in \Theta(f(n))$.

$\exists d_1, d_2 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1$ $d_1 f(n) \leq g(n) \leq d_2 f(n)$

$d_1 = \frac{1}{c_2}, \ d_2 = \frac{1}{c_1}, \ n_1 = n_0$

- $g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n)$
- $\frac{1}{c_2} f(n) \le g(n)$

$$\frac{1}{c_2} f(n) \le g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n)$$

$f, g, h, k \geq 0$

Dokažte následující tvrzení:

Jsou dány nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$ takové, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro něž

$$g(n) \leq f(n) \leq h(n),$$

pro všechna $n \geq n_0$. Pak jestliže $g(n) \in \Omega(k(n))$ a $h(n) \in \mathcal{O}(k(n))$, pak $f(n) \in \Theta(k(n))$.

- $\exists c_1 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 \quad g(n) \geq c_1 k(n)$
- $\exists c_2 > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_2 \quad h(n) \leq c_2 k(n)$

chceme

$\exists d_1, d_2 > 0 \ \exists m_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m_1 \quad d_1 k(n) \leq f(n) \leq d_2 k(n)$

$d_1 = c_1, \ d_2 = c_2, \ m_1 = \max\{n_1, n_2, n_0\}$

$$\underline{c_1 k(n)} \leq g(n) \leq \underline{f(n)} \leq h(n) \leq \underline{c_2 k(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/2}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/2}} = 0$$

Rozhodněte, zda platí

- 2^{n+1} je $\Theta(2^n)$, ANO
- $2^{n/2}$ je $\Theta(2^n)$. NE

$$\exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad c_1 2^n \leq 2^{n+1} \leq c_2 2^n$$

pro $c_1 = c_2 = 2$, $n_0 = 1$

nebo pro $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 4$, $n_0 = 1$

$$\exists c_1, c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \quad c_1 2^n \leq \underbrace{2^{n/2} \leq c_2 2^n}_{c_2 = 1,\ n_0 = 1}$$

$c_1 2^n \le 2^{n/2}$ $: 2^{n/2}$ $\log_2 x = \lg x$

$c_1 2^{n/2} \le 1$ $: c_1$

$\boxed{2^{n/2} \le \frac{1}{c_1}}$ неех., $\frac{n}{2} \le \lg\frac{1}{c_1}$, $n \le 2\lg\frac{1}{c_1}$

$\forall c_1 \; \forall n_0 \; \exists n \ge n_0 \quad c_1 2^n > 2^{n/2}$

при $c_1 \ge 1$, $\lg\frac{1}{c_1} \le 0$, при $n = n_0$

при $0 < c_1 < 1$ при $n = \max\{n_0, [2\lg\frac{1}{c_1}]+1\}$

Asymptotické chování funkcí

$f(n) \in O(g(n))$ $\exists c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ f(n) \le c\,g(n)$

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou nezáporné funkce.

$f(n) \in o(g(n))$ $\forall c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ f(n) < c\,g(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Pokud $f \in o(g)$, pak $f \in O(g)$

$f(n) = n$, $g(n) = 2n$ $\quad f \notin o(g)$

$n \le c\,2n$

pro $c = 1$

$\forall c$, $c = \frac{1}{4}$ $\quad n \le \frac{1}{4} 2n = \frac{n}{2}$ ×

$f(n) \in \omega(g(n))$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $f(n) \in \Theta(g(n))$

$\frac{1}{n}$, e, $\ln\ln(n)$, $\ln n$, $(\ln n)^2$, $\sqrt{n}$, $n\lg n$, e^n, 4^n, $n!$

Jsou dány funkce

$$4^n,\ n!,\ \underset{}{\overset{e}{n^{\frac{1}{\ln n}}}},\ e^n,\ \ln(n!),\ \ln(\ln n),\ n\lg n,\ \overset{(\ln n)^2}{\ln(n^{\ln n})},\ \sqrt{n},\ \frac{1}{n}.$$

Uspořádejte tyto funkce do posloupnosti

$f_1, f_2, \ldots$, tak, aby $f_i \in \mathcal{O}(f_{i+1})$, kde $i = 1, 2, \ldots$

Uveďte všechny dvojice funkcí f, g takové, že $f \in \Theta(g)$.

$$n^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\frac{1}{\ln n}\ln n} = e$$

$$\ln(n^{\ln n}) = \ln n \cdot \ln n = (\ln n)^2 = \ln^2 n$$

$\ln(n!) \in \Theta(n\lg n)$ $\qquad$ $\ln n$ a $\lg n$

- $f \in O(h)$, $h \in O(g)$ pak f je $O(g)$
- $e^n \in O(4^n)$ $\quad e < 4$, $e^n < 4^n$, $\quad c = 1$, $n_0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n = 0$$

$e/4 < 1$ $\quad e^n \in o(4^n)$

- $4^n \in O(n!)$ $\quad \exists c\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ 4^n < c\,n!$

jno $\boxed{c = 1,\ n_0 = 16}$ $\quad 4^n = 16^{\frac{n}{2}} \leq n^{\frac{n}{2}} \leq n!$

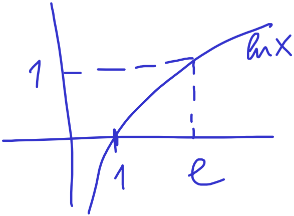
$n \geq 16$

- $\ln \ln n \in O(\ln n)$

$\ln(\ln n) \geq 0$ pro $n \geq 3$

$\ln n \geq 1$

$n \geq e$



$\exists c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{\ln \ln n \leq c \ln n}$

pro $c=1$, $n_0=3$

$e^{\ln \ln n} < e^{\ln n}$

$\ln n < n \quad \forall n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln n} = /\frac{\infty}{\infty}/ = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\cdot \cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}} = 0$$

Z přednášky

$a^n \notin \Theta(b^n)$ $\cancel{?}$

- Pro každé $a > 1$ a $b > 1$ platí $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$.
- $\lg n! \in \Theta(n \lg n)$.
- Věta (Gauss). Pro každé $n \geq 1$ platí $\boxed{n^{n/2} \leq n!} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
- Věta Ať $f(n)$ je nezáporná neklesající funkce.

  Pokud $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$, pak

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(nf(n)).$$

$\exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$ $\boxed{f(n) \leq c\, g(n)}$

$\exists d > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m_0$ $2^{f(n)} < d\, 2^{g(n)}$

$2^{f(n)} < 2^{c\,g(n)} = \left(2^{g(n)}\right)^c$

Dokažte nebo vyvraťte:

1) ▶ Jestliže pro dvě nezáporné funkce platí $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$, pak $2^{f(n)}$ je $\mathcal{O}(2^{g(n)})$. NE

2) ▶ Pro každou nezápornou funkci $f(n)$ platí $f(n) \in \mathcal{O}(f^2(n))$. NE

1) $f(n) = n$ $\quad$ n $\quad$ platí $\quad$ $f(n) \in O(g(n))$

$g(n) = \frac{n}{2}$ $\quad$ $2n$ $\quad$ $2^n \notin O(2^{\frac{n}{2}})$

$2^n \leq c\, 2^{\frac{n}{2}}$

$2^{n/2} \leq c$ nejde

2) neplatí pro $f(n) = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \leq c \frac{1}{n^2}$, $n \leq c$ nejde

Zbadamy, czy wynika

$$f(n) \in o(g(n)) \overset{?}{\Longrightarrow} 2^{f(n)} \in O\left(2^{g(n)}\right)$$

$$\forall c>0 \ \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0 \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

Zrobimy $\underline{c := 1}$ $\underline{\exists n_0 \in N}$ $\underline{\forall n \geq n_0}$ $f(n) < g(n)$

a tedy $\underbrace{2^{f(n)} \leq 1 \cdot 2^{g(n)}}_{c>0}$

$$2^{f(n)} \in O\left(2^{g(n)}\right).$$

$\exists f, g > 0 \quad f \notin O(g)$ a $g \notin O(f)$?

$f(n) = n \qquad g(n) = \begin{cases} n^2, & n \text{ je sudé} \\ \ln n, & n \text{ je liché} \end{cases}$

Jsou dány funkce $f(n) = n^{\ln n}$ a $g(n) = (\lg n)^n$. Rozhodněte, zda platí $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ nebo ani jedno.

$f(n) = n^{\ln n} = e^{(\ln n)^2}$

$g(n) = (\lg n)^n = e^{n \ln \lg n}$

$(\ln n)^2 < n < n \ln \lg n$

$f \in O(g)$

$e^\alpha > e^\beta$ pokud $\alpha > \beta$, $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{e^\alpha}{e^\beta} = \lim e^{\alpha - \beta}$