Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

10. cvičení 2021

SAT je NPC | je 2,3-CNF-SAT je NPC

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

DNF-SAT je P

Rozhodněte, zda problém splnitelnosti formulí v DNF (disjunktivním normálním tvaru) leží v $\mathcal{P}$ nebo jen v $\mathcal{NP}$, a své tvrzení zdůvodněte.

CNF $u(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$, $\varphi_i = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{m_i}$

$=1 \quad =1 \quad =1$

literály: $x, \neg x$

DNF $u(\psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_n) = 1$, $\psi_i = (l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_{m_i})$

$=1$

je nespl. iff $x, \neg x$

formule φ je spl., pokud $\exists$ ohodn. u, $u(\varphi) = 1$

$P \overset{?}{=} NP$

$U \in P$ pokud $\exists$ DTM M,

$U \in NP$ pokud $\exists$ NTM M, který problém U (jazyk L_U) rozhoduje v polynom. čase

$U \in NPC$ pokud 1) $U \in NP$

2) $\forall V \in NP,\ V \trianglelefteq U$

$V \trianglelefteq_p U$ pokud existuje $\boxed{\text{alg. } A}$ (polynom.), který

I úlohy $V \overset{A}{\rightsquigarrow} I'$ úlohy U, takže

I je ANO iff I' je ANO

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$|V|=n$ Problém klik $\triangle_p$ SAT φ v CNF

Ukažte, že $|E|=m$ $G=(V,E), k \rightsquigarrow \varphi$ v CNF Je φ spl.?

Problém klik se polynomiálně redukuje na problém SAT.

Polynomiální redukci pečlivě popište a zdůvodněte.

Problém klik: Je dán neorient. graf $G=(V,E)$ bez smyček a číslo k

$(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

Existuje klika v G o alespoň k vrcholech?

Log. proměnné: pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme k log. prom. $\underbrace{x_v^1, x_v^2, \ldots x_v^k}$

Formulemi vyjádříme:

α 1. Pro každé $i=1,..k$ je vybrán přesně jeden vrchol

β 2. Pro $i \neq j$ jsou vybrané vrcholy různé

γ. Jestliže $\{v,w\} \notin E$, pak nebyly do kliky vybrány oba vrcholy v, w.

$\varphi = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$

$$\alpha = \bigwedge_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\bigvee_{v \in V} x_v^i \right)}_{\wedge} \wedge \bigwedge_{v \neq w} \underbrace{\left(\neg x_v^i \vee \neg x_w^i \right)}_{\wedge}$$

$\boxed{x_v^i \Rightarrow \neg x_w^i}$

$\neg x_v^i \vee \neg x_w^i$

$$\beta = \bigwedge_{v \in V} \underbrace{\bigwedge_{i \neq j} \left(\neg \underline{x_v^i} \vee \neg \underline{x_v^j} \right)}_{\wedge}$$

$\boxed{x_v^i \Rightarrow \neg x_v^j}$

$\boxed{x_v^i \Rightarrow \neg x_w^j}$

$$\gamma = \bigwedge_{\{v,w\} \notin E} \bigwedge_{i \neq j} \underbrace{\left(\neg x_v^i \vee \neg x_w^j \right)}_{\wedge}$$

$u(x_v^i) = 1$, pak $u(x_w^j) = 0$ $i \neq j$

log. prom. je $n \cdot k$

literálů v α je

v β je

$$\boxed{\begin{array}{l} k \cdot (n + n(n-1)) + \\ n \cdot k(k-1) + \end{array}}$$

v γ je $\boxed{\left(\frac{n(n-1)}{2}-m\right)\cdot k(k-1)}$

$\Rightarrow$ $\exists$ klika o alespoň k vrcholech $(v_1, \dots, v_k)$ $x^1_{v_1}, x^2_{v_2}$

pak φ je splnitelná

ohodnotíme $u(x^i_{v_i})=1$, ostatní proměnné 0

v α $\quad u\left(\bigvee_{v\in V} x^i_v\right)=1$, protože je tam $x^i_{v_i}$ ohodn 1

$v\neq w$ $\quad u(\neg x^i_v \vee \underbrace{\neg x^i_w}_{=1})=1$, protože pokud $u(x^i_v)=1$, pak $u(x^i_w)=0$

v $\beta_{i\neq j}$ $\quad u(\neg x^i_v \vee \underbrace{\neg x^j_v}_{=1})=1$, protože pokud $u(x^i_v)=1$ pak $u(x^j_v)=0$

v γ $\quad$ kdyby $u(\neg x^i_v \vee \neg x^j_w)=0$, pak

$$u(\neg x_v^i) = u(\neg x_w^j) = 0 \quad a$$

$$u(x_v^i) = u(x_w^j) = 1$$

vrcholy v, w jsou v seznamu na místech i, j

$\{v, w\} \in E \Rightarrow$ taková závorka v φ není

$\Leftarrow$ φ je splnitelná, $\exists u : u(\varphi) = 1$

pokud pro vrchol $v \in V$ $\exists i \in \{1, \dots k\}, u(x_v^i) = 1$

přidám v na místo i $\quad \left(\underset{\_\ \_\ i\ \_\ \_}{v} \right)$

protože $u\left(\bigvee_{v \in V} x_v^i\right) = 1 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots k\}$ najdu $v \in V$

$u(x_v^i) = 1$

protože $u(\neg x_v^i \vee \neg x_w^i) = 1$ pokud $u(x_v^i) = 1$, pak

$u(x_w^i) = 0$

f je orient. graf

Ham cyklus $\triangleleft_p$ Ham. orient. cestu

$G=(V,E) \rightsquigarrow G'=(V',E')$

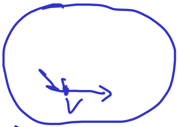
Zkonstruujte polynomiální redukci problému existence hamiltonovského cyklu na problém existence hamiltonovské orientované cesty.

$\forall f$ zvolíme jeden $v \in V$, nahradíme ho $v_1, v_2 \in V'$

hrany $e \in E$ $\quad kv(e)=v$ $\quad$ jsou v E' s $\quad kv(e)=v_2$

$\qquad\qquad\qquad pv(e)=v \qquad\qquad\qquad\qquad pv(e)=v_1$

$|V|=n, |E|=m \qquad |V'|=n+1, |E'|=m$

G 

G' 

$\Rightarrow$ Existuje Ham cyklus v G $\rightsquigarrow$ v G' máme Ham cestu z v_1 do v_2

$\Leftarrow$ Ex. Ham cesta v G' z v_1 do v_2 $\rightsquigarrow$ v G máme Ham cyklus