Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

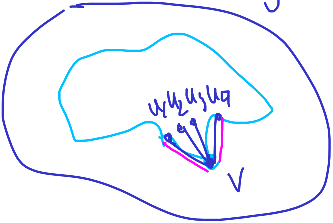
11. cvičení 2021

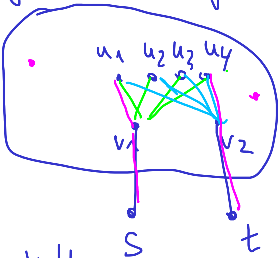
Zkonstruujte polynomiální redukci problému existence hamiltonovské kružnice na problém existence hamiltonovské neorientované cesty. Fakt, že se jedná o polynomiální redukci pečlivě zdůvodněte.

$G \rightsquigarrow G'$

Ham. kružnice $\lhd_p$ Ham. neorient. cesta

G I je Ano $\Rightarrow$ $\Leftarrow$ G' I' je ANO



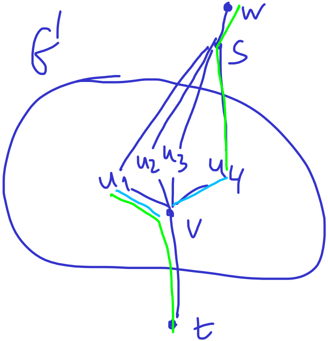


$|V| = n$

$|E| = m$

$|V'| = n+3$

$|E'| \le m + n - 1 + 2$



G'
w
s
u1
u2
u3
u4
v
t

$a \vee b \models (\neg a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \Rightarrow a)$

Problém 2-SAT je v $\mathcal{P}$.

Návod: K formuli φ v 2-CNF, sestrojte orientovaný graf G_φ takto:

vrcholy jsou proměnné formule φ a jejich negace;

hrana vede z vrcholu $\neg\alpha$ do vrcholu β a z vrcholu $\neg\beta$ do vrcholu α právě tehdy, když φ obsahuje klauzuli $\alpha \vee \beta$.

Dokažte: φ není splnitelná právě tehdy, když existuje proměnná x taková, že v G_φ existují orientované cesty z x do $\neg x$ a z $\neg x$ do x.
Toho využijte k nalezení polynomiálního algoritmu.

1) $x \rightsquigarrow \neg x$ $\qquad$ $u(x) = 1$, pak (1) $u(\neg x) = 1$ spor.

2) $\neg x \rightsquigarrow x$ $\qquad$ $u(x) = 0$, pak $u(\neg x = 1)$ a (2) $u(x) = 1$ spor.

$\alpha \vee \beta$ $\quad (\neg\alpha, \beta)$, $(\neg\beta, \alpha)$

$u(x_1)=1$, $u(x_2)=0$

$x_1 \in T_4$ $\quad \neg x_1 \in T_1$

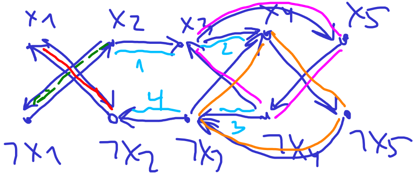
$T_1 = S_2$

$T_2 = S_3$

$T_3 = S_4$

$T_4 = S_1$

$$\varphi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_3 \vee x_4)$$

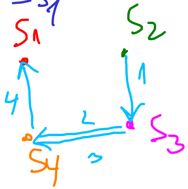


$S_1 = \{x_1, \neg x_2\}$

$S_2 = \{x_2, \neg x_1\}$

$S_3 = \{x_3, x_5, \neg x_4\}$

$S_4 = \{x_4, \neg x_5, \neg x_3\}$



1. Existuje-li orient. sled z a do b, pak existuje i orient sled z $\neg b$ do $\neg a$
2. Existuje li cesta z a do b, pak v každém u: $u(\varphi)=1$ platí $u(a)=1$, pak $u(b)=1$

pokud $(a,b) \in E$, pak v φ ex. klauzule $\neg a \vee b$ $\quad u(\neg a \vee b)=1$

$u(a)=1$, $u(\neg a)=0$, pak $u(b)=1$

Alg

1) najde silné souv. komp. G_p : $S_1, S_2 \dots S_k$

2) Exist S_i, Exist x ! $x, \neg x$ jsou v S_i, pak alg. končí, φ je nespl.

3) Zkonstruujeme kondenzaci grafu G_φ a vrcholy topologicky uspořádáme. $T_1, T_2, \dots, T_k$

$x \in T_i$	$u(x)=0$	$i<j$
$\neg x \in T_j$	$u(x)=1$	$i>j$

$0 = x$

$1 = \neg x$

lemma φ je nespl. iff $\exists x \, \exists S_i$ tak, že $x, \neg x \in S_i$

$\Rightarrow$ Nechť $u(\varphi)=1$. Pokud $x, \neg x \in S_i$, pak $u(x)=u(\neg x)$ spor.

$\Leftarrow$ žádné S_i neobs. $x, \neg x$ $\Rightarrow$ φ je spl.

vezmeme u z bodu 3)

Pokud $u(\varphi)=0$, pak existuje klausule $a \vee b$

$u(a \vee b)=0$

$u(a)=u(b)=0$

Označme $a \in T_{i_1}$, $b \in T_{i_2}$, $\neg a \in T_{i_3}$, $\neg b \in T_{i_4}$

$u(a)=0 \implies i_1 < i_3$

$u(b)=0 \implies i_2 < i_4$

$a \vee b$ je z φ $\implies$ v G_φ jsou hrany $(\neg a, b)$, $(\neg b, a)$

$i_3 \leq i_2$

$i_4 \leq i_1$

Celkem tedy: $i_1 < i_3 \leq i_2 < i_4 \leq i_1$, což je spor

$i_1 < i_1$

$u(\varphi) = 1$

Problém k-barevnosti, $k \geq 3$

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.

Otázka: Má graf G obarvení k barvami?

Rozhodněte, zda je problém k-barevnosti $\mathcal{NP}$ úplný. $= NPC$

$\boxed{\text{3-barevnost} \in NPC}$?

3-CNF SAT $\triangleleft_p$ 3-barevnost

4-barevnost $\in NPC$:

1) 3-barevnost $\triangleleft_p$ 4-barevnost
2) 4-barevnost $\in NP$

⋮

$U \in P$ máme polynom. alg. (DTM)

$U \in NP$ 1) certifikát (jak obarvit vrcholy)

$|V| = n$, $|E| = m$ 2) polynom. alg

k-barevnost

(k-3) vrcholu úplný graf

$|V'| = n+1$

$|E'| = m+n$

$B = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $\quad 1, 2, 3, 4 \quad k = 5 \quad 5 = 1+4 = 2+3$

$k = 4$

SubsetSum $\triangleleft_p$ Dělení kořisti

Je problém dělení kořisti $\mathcal{NP}$ úplný?

Problém SubsetSum

Úloha: Jsou dána kladná čísla $\boxed{a_1, a_2, \ldots a_n \text{ a číslo } K.}$

1) $B = 2K$

2) $B \neq 2K$

Otázka: Existuje podmnožina $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že $\sum_{i \in J} a_i = K$?

Problém Dělení kořisti

$b_1 = a_1 \quad b_2 = a_2 \; \ldots \quad b_n = a_n$

$b_{n+1} = B - 2K$

$b_{n+1} = 2K - B$

Vstup: Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Otázka: Existuje $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že $\underbrace{\sum_{i \in J} a_i} = \underbrace{\sum_{i \notin J} a_i}$?

SubsetSum $\lhd_p$ Problém batohu

Je problém problém batohu $\mathcal{NP}$ úplný?

Problém batohu. Je dáno n předmětů $1, 2, \ldots, n$. Každý předmět i má cenu c_i a váhu w_i. Dále jsou dána čísla A a B.

Je možné vybrat předměty tak, aby celková váha nepřevýšila A a celková cena byla alespoň B?

Přesněji, existuje podmnožina předmětů $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $\underline{\sum_{i \in I} w_i \leq A}$ a $\underline{\sum_{i \in I} c_i \geq B}$?