Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

12. cvičení 2021

$a_1, a_2, \dots a_n, K$ $\rightsquigarrow$ A

$\sum_{i=1}^{n} a_i = S$

1) $S = 2K$ $\quad a_1, a_2, \dots, a_n$

2) $2K < S$ $\quad S\ \underline{a_1, \dots, a_n}, \underline{S-2K}$

3) $2K > S$ $\quad a_1, \dots, a_n, \overset{a_{n+1}}{2K-S}$

$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = S + 2K - S = 2K$

SubsetSum $\lhd_p$ Dělení kořisti

Problém SubsetSum

Úloha: Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \dots a_n$ a číslo K.

Otázka: Existuje podmnožina $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že $\sum_{i \in J} a_i = K$?

Problém Dělení kořisti

Vstup: Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \dots a_n$.

Otázka: Existuje $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$?

2) $\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} a_i = S + S - 2K = 2S - 2K}$ $\quad S - K$

$\Rightarrow$ ANO SubsetSum $\exists J,\ \boxed{\sum_{i \in J} a_i = K,\ a_{n+1} = S - 2K}$ $\quad \sum_{i \notin J} a_i = S - K$

$\Leftarrow$ ANO Dělení kořisti

$\exists J \subseteq \{1, \ldots, n, \underline{\underline{n+1}}\}$ $\quad \sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i = S - k$

? $J' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ $\quad \sum_{i \in J'} a_i = k$

pokud $n+1 \in J$, $\quad J' = J \setminus \{n+1\}$ $\quad \sum_{i \in J'} a_i = k$

$S - k - (S - 2k) = k$

$a_1, \dots, a_n, K \rightsquigarrow c_i = a_i$, $w_i = a_i$, $A = K$, $B = K$

SubsetSum $\lhd_p$ Problém batohu

Problém batohu. Je dáno n předmětů $1, 2, \dots, n$. Každý předmět i má cenu c_i a váhu w_i. Dále jsou dána čísla A a B.

Je možné vybrat předměty tak, aby celková váha nepřevýšila A a celková cena byla alespoň B?

Přesněji, existuje podmnožina předmětů $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ taková, že $\sum_{i \in I} w_i \leq A$ a $\sum_{i \in I} c_i \geq B$?

$\Rightarrow$ ANO SubsetSum

$\exists J: \sum_{i \in J} a_i = K$

ANO batohu

$a_i = K$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i \in J} c_i \geq B \\ \sum_{i \in J} w_i \leq A \end{array}}$$

ANO

$\Leftarrow$ $\exists J: \sum_{i \in J} a_i \geq K$, $\sum_{i \in J} a_i \leq K \Rightarrow \sum_{i \in J} a_i = K$

Problém podgrafu

Vstup: Jsou dány neorientované grafy G a H.

Otázka: Obsahuje graf G podgraf, který je izomorfní grafu H?

Rozhodněte, zda je problém podgrafu $\mathcal{NP}$ úplný.

Řeš. Je třeba ukázat:

1) Problém podgrafu je NP.

Stačí ukázat: $G = (V, E)$, $H = (V_H, E_H)$

když máme $f: V_H \xrightarrow{\text{prostá}} V$, $E_H \longrightarrow E$, můžeme polynomiálně zkontrolovat, že podgraf G indukovaný $f(V_H, E_H)$ je isomorfní s H.

2) Najít $\mathcal{V} \in NPC$ a zkonstruovat

$\mathcal{V} \lhd_p$ Problém podgraf

$\mathcal{V}$ ... problém klik, HK

$G=(V,E),\ k$ $\xrightarrow{\text{polynomiálně}}$ $G=(V,E)$

? Existuje v G klika o aspoň k vrcholech?

H = úplný prostý graf na vrcholech $\{1,\dots,k\}$

? Existuje v G podgraf isomorfní H?

Teď zřejmě:

v G existuje klika o $\geq k$ vrcholech

iff v G existuje podgraf isomorfní H.

1) Je-li $C \subseteq V$ klika o aspoň k vrcholech, tak každá podmnožina C o k vrcholech je podgraf isomorfní s H.

2) Je-li $T \subseteq V$ takové, že podgraf G indukovaný T je isomorfní s H, tak T je částí kliky o aspoň k vrcholech.

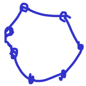
$I \rightsquigarrow I'$

V: $\boxed{\text{Ham. kružnice}}$ $\triangleleft_p$ P. Podgrafu

$G=(V,E) \rightsquigarrow G'=G$

$H'=(V',E')$ $n=|V'|=|V|$ kružnice

Existuje Ham. kružnice



$\Rightarrow$ v G exist. Ham. kružnice, pak G' obsahuje podgraf izom. H'

$\Leftarrow$ v G' najdeme podgraf izom. H', pak v G exist. ham. kružnice.

Problém vrcholového pokrytí

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf G bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G vrcholové pokrytí o $\overset{\text{MAX}}{k}$ vrcholech?

Problém vrcholového pokrytí $\triangleleft_p$ problém SAT.

Polynomiální redukci pečlivě popište a zdůvodněte.

$G=(V,E)$, k $\rightsquigarrow$

$|V|=n$, $|E|=m$

$P=(v_1, v_2, \dots, v_n)$

proměnné $x_v^1, x_v^2, \dots, x_v^k$, $v \in V$

$$\boxed{\bigwedge_{\{u,v\}\in E} (x_u \vee x_v)}$$

$x_v^i = 1$ vrchol v je na místě i

$x_v^i \Rightarrow \neg x_u^i$

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \left[\left(\bigvee_{v\in V} x_v^i\right) \wedge \bigwedge_{u\neq v} (\neg x_v^i \vee \neg x_u^i) \right] = \alpha \qquad \varphi = \alpha \wedge \cancel{\beta} \wedge \gamma$$

$x_v^i \Rightarrow \neg x_v^j$

$$\cancel{\beta = \bigwedge_{v\in V} \bigwedge_{i\neq j} (\neg x_v^i \vee \neg x_v^j)}, \quad \gamma = \bigwedge_{\{u,v\}\in E} \left(\bigvee_{i=1}^{k} x_u^i \vee \bigvee_{i=1}^{k} x_v^i \right)$$

Označme L jazyk, který se skládá z neorientovaných grafů, které obsahují trojúhelník (podgraf, který je isomorfní s úplným grafem na 3 vrcholech).

$G = (V, E)$
$|V| = n, |E| = m$

Je dán následující pravděpodobnostní algoritmus.

1. Náhodně vybereme hranu $\{x, y\}$ grafu G a vrchol z, $z \neq x$, $z \neq y$.
2. Zkontrolujeme, zda v G jsou hrany $\{x, z\}$ a $\{y, z\}$. Jestliže ano, úspěšně skončíme.

Spočítejte, kolikrát máme opakovat kroky 1 a 2, abychom dostali
3) polynomiální algoritmus typu Monte-Carlo pro jazyk L.

1) $w \notin L$ úsp. s pravd. 0

2) $w \in L$ úsp. s pravd. $\geq \frac{1}{2}$

když v G není trojúh., nikdy neskončí úsp.

když v G je trojúh.

pro jednu hranu $\{x, y\}$ a jedno z $\quad \frac{3}{m} \cdot \frac{1}{n-2}$ úsp.

k náhodných opakování

neúsp. $\left(1-\frac{3}{m}\cdot\frac{1}{n-2}\right)^k$

úsp. $1-\left(1-\frac{3}{m}\frac{1}{n-2}\right)^k \geq \frac{1}{2}$ $\quad k=?$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$ $\quad \frac{1}{2} > \underbrace{e^{-1}} \geq \left(1-\underbrace{\frac{3}{m}\frac{1}{n-2}}_{x\to 0}\right)^k \simeq \underbrace{e^{-k\frac{3}{m}\frac{1}{n-2}}}$

$\left(1-\frac{3}{m(n-2)}\right)^{-\frac{m(n-2)}{3}} \simeq e$

$k\frac{3}{m}\frac{1}{n-2} \geq 1$

$k \geq \frac{m(n-2)}{3}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{k}{x}} = e^{-k}$ $\quad (1-x)^k \underset{x\to 0}{\simeq} e^{-kx}$

$n,\ m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

$\lim_{x\to 0}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$

$\left(1+(-x)\right)^{\frac{1}{-x}} \to e$

RTM popísaný stavovým diagramom

$$q \xrightarrow{X,a\,/\,Y D_1 D_2} p \quad \text{iff} \quad \delta(q, X, a) = (p, Y, D_1, D_2)$$

obsah 1. pásk

smer pohybu 1. hlavy

obsah vst. p.

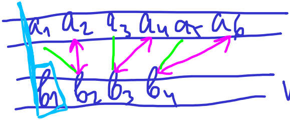
smer pohybu 2. hl

$X, Y \in \Gamma \quad a \in \{0, 1\}$

DTM

R, L, S

$ab / \frac{a'}{a} \; L\,R$



$w \in \{0,1\}^*$

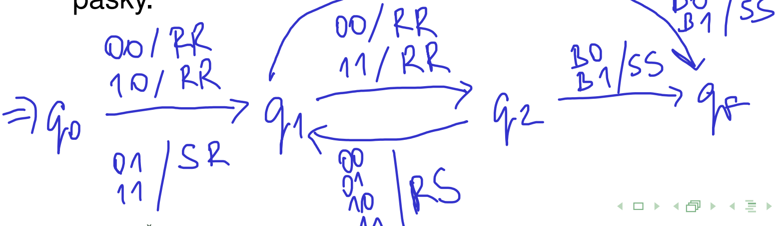
Navrhněte RTM M, který se pro dané vstupní slovo $w = a_1 a_2 \dots a_n$, $n > 0$, chová takto:

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 0, pak M zkontroluje, zda se symboly vstupního slova w na sudých místech shodují s obsahem druhého a dalšího pole náhodné pásky.

$b_1 = 0$

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 1, pak M zkontroluje, zda se symboly vstupního slova w na lichých místech shodují s obsahem druhého a dalšího pole náhodné pásky.

$b_1 = 1$



Náhodná permutace. Pro následující dva algoritmy rozhodněte, zda vygenerují náhodnou permutaci (tj. vygenerují každou permutaci a to se stejnou pravděpodobností):

$n \quad |S_n| = n!$

pro $n=3$, $3! = 6$

1. algoritmus: NE

for $i := 1$ to n do $A[i] := i$;
for $i := 1$ to $n-1$ do
    swap $A[i] \longleftrightarrow A[Random(i+1, n)]$;

$i=1$
$i=2$

$\overline{2 \ , \ 3}$
$3 \ , \ 3$

$123 < \begin{matrix} 213 - 231 \\ 321 - 312 \end{matrix}$

nevygen. perm. s $A[1]=1$

2. algoritmus: ANO

for $i := 1$ to n do $A[i] := i$;
for $i := 1$ to n do
    swap $A[i] \longleftrightarrow A[Random(i, n)]$;

$i=1$
2
3

$\overline{1,2,3}$
2 3
3

123 — 123 — 123, 132
123 — 213 — 213, 231
123 — 321 — 321, 312

1. $A[1] = 1, \; \ldots, \; A[n] = n$

2. $i = 1$ $\quad A[1] \leftrightarrow A[j]$ $\quad j$ je náhodně vybráno z $1, \ldots, n$

$i = 2$ $\quad A[2] \leftrightarrow A[j]$ $\quad j$ náhodně z $2, \ldots, n$

$\vdots$

$i = n$ $\quad A[n] \leftrightarrow A[n]$

Je náhodná permutace? $\boxed{\text{ANO}}$

Máme $n!$ průchodů, každý se stejnou pravděpodobností a končí různými permutacemi.
