Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

3. cvičení 2021

Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) \in \Theta(h(n))$ a $g(n) \in \omega(h(n))$, pak

$$f(n) + g(n) \in \Theta(g(n)).$$

$\exists c_1, c_2 > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_1 \quad c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2\, h(n)$

$\forall c_3 > 0 \; \exists n_2 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_2 \quad \underbrace{c_3 h(n) < g(n)}_{\geq 0}$

$n_2(c_3)$

chceme

$\exists a_1, a_2 > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \quad a_1 g(n) \leq f(n) + g(n) \leq a_2\, g(n)$

$a_1 = 1$

$a_1 = 1$

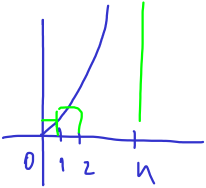
$a_2 = 2$

$n_0 = \max\{n_1, n_2(\text{pro } c_2)\}$

$$f(n)+g(n) \le c_2 h(n)+g(n) < g(n)+g(n) = 2g(n) \le a_2 g(n)$$

pro $c_3 = c_2$

$a_2 = 2$



$0^3+1^3+2^3+\dots+n^3$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 \in \Theta(n^4)$$

Odhadněte asymptotický růst $\sum_{i=0}^{n}(7i^3+3i^2+16)$. $\in \Theta(n^4)$

$f(n)=7n^3+3n^2+16 \in \Theta(n^3)$ $\boxed{g(n)=n^3}$

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \in \Theta\left(\sum_{i=0}^{n} g(i)\right)$$

$g(n) \geq 0$, je rostoucí

$\boxed{g(\frac{n}{2}) \in \Theta(g(n))}$ pak $\sum_{i=0}^{n} g(i) \in \Theta(n\,g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n/2)^3}{n^3} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}}$$

$\in \Theta(5^n)$

$$\frac{5^n}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} = \int_0^n 5^x \, dx \leq \sum_{i=1}^{n} 5^i \leq \int_1^{n+1} 5^x \, dx = \frac{5^{n+1}}{\ln 5} - \frac{5}{\ln 5} = \frac{5}{\ln 5}(5^n - 1) \in \Theta(5^n)$$

Odhadněte asymptotický růst $\sum_{i=1}^{n} (5^i + i^{100})$.

$$f(n) = 5^n + n^{100} \in \Theta(5^n)$$

$$g(n) = 5^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(i) \in \Theta(5^n)$$

$g(n) \geq 0$ rostoucí

$$g\left(\frac{n}{2}\right) = 5^{\frac{n}{2}} \notin \Theta(5^n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 5^i = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n \qquad \leq \sum_{i=1}^{\infty} 5^i = \infty$$

$q = 5 > 1 \qquad q = \frac{1}{5} < 1$

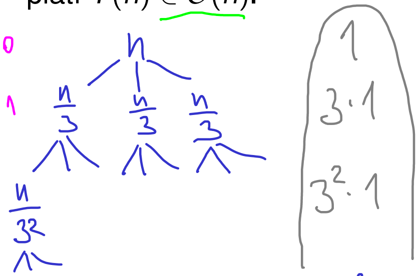
$$5^n \le 5^n + 5^{n-1} + \dots + 5^2 + 5 \le \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{i-n+1} = \frac{5^n}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \cdot 5^n$$

$$+\,1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots$$

Pomocí rekursivních stromů ukažte, že pro funkci $T(n)$, která je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + 1, \boxed{T(1) = 1}$$

platí $T(n) \in \mathcal{O}(n)$.



$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} 3^i + n =$$

$$= 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{k-1} + 3^k \in \Theta(3^k)$$

$$T(n) \in \Theta(n)$$

k $\frac{n}{3^k} = 1$, $n = 3^k$, $k = \log_3 n$, listů $3^k = n$

MT $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ $a \geq 1,\ b > 1,\ f(n) \geq 0$

$\frac{n}{b}$ $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$

$f(n)$ $\boxed{n^{\log_b a}}$

$T(n) \in \Theta(\ldots)$

Funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

MT1

$T(n) = 4\,T(\frac{n}{2}) + n \lg n,\ T(1) = 1.$

$a = 4,\ b = 2$ $\log_b a = \log_2 4 = 2$

$f(n) = \underline{n \lg n} \in O(\underline{n^{2-\varepsilon}})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$

$n^{1{,}000001}$ pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n^{2-\frac{1}{2}} = n^{3/2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n \lg n}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n^{1/2}} = 0$ pro $0 < \varepsilon < 1$

$T(n) \in \Theta(n^2)$

$T(n) = 9\,T(\frac{n}{3}) + n^2,\ T(1) = 1.$

MT2

$a = 9,\ b = 3 \quad \log_b a = \log_3 9 = 2$

$f(n) = n^2 \in \Theta(n^2)$

$T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \lg n)$

$\frac{3}{2} = \log_{25} 25^{3/2} > \underbrace{\log_{25} 30}_{} > 1$

$25^{3/2} = (\sqrt{25})^3 = 125$ $\log_{25} 25 = 1$

MT3

$T(n) = 30\, T(\frac{n}{25}) + n^{\frac{3}{2}} \lg n,\ T(1) = 1.$

$T(n) \in \Theta(n^{3/2} \lg n)$

$a = 30,\ b = 25$ $\log_{25} 30$

$f(n) = n^{3/2} \lg n \in \Omega(n^{\log_{25} 30 + \varepsilon})$, $1 < \log_{25} 30^{+\varepsilon} < \frac{3}{2}$

pro nějaké $\varepsilon > 0$

$0 < \varepsilon < \boxed{\frac{3}{2} - \log_{25} 30} > 0$

$\log_{25} 125 - \log_{25} 30$

$\log_{25} \frac{125}{30}$

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$$ pro nějaké $\boxed{c < 1}$
pro dost. velká n

$$\underbrace{30 \left(\frac{n}{25}\right)^{3/2} \lg \frac{n}{25}}_{\parallel} \leq c\, n^{3/2} \lg n \;, \text{ pro } c = ?$$

$$\frac{30}{125} n^{3/2} (\lg n - \underbrace{\lg 25}_{\geq 0}) \leq \frac{30}{125} n^{3/2} \lg n \;, \quad c = \frac{30}{125} < 1$$

$n = 2^k$ $\frac{n}{2} = 2^{k-1}$

Strassenův algoritmus na rychlé násobení. Máme vynásobit dvě čtvercové matice řádu 2^k. Matice rozdělíme na čtyři matice řádu 2^{k-1} a násobíme podle vztahů

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \begin{pmatrix} S_1 + S_2 - S_4 + S_6 & S_4 + S_5 \\ S_6 + S_7 & S_2 - S_3 + S_5 - S_7 \end{pmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} S_1 &= (B - D) \cdot (G + H) & S_5 &= A \cdot (F - H) \\ S_2 &= (A + D) \cdot (E + H) & S_6 &= D \cdot (G - E) \\ S_3 &= (A - C) \cdot (E + F) & S_7 &= (C + D) \cdot E \\ S_4 &= (A + B) \cdot H \end{aligned}$$

Spočítejte časovou složitost Strassenova algoritmu.

$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{f(n)}_{\text{sčítání}}$

$f(n) \in \Theta(n^2)$

$f(n) = c \cdot n^2$

$T(n) \in \Theta\left(n^{\lg 7}\right)$, $n^{\lg 7} \in O(n^3)$

$a = 7$
$b = 2$

$cn^2 \in O\left(n^{\lg_2 7 - \varepsilon}\right)$

MT 1

$2 = \lg 4$

$3 = \lg 8$

Funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

$T(n) = T(n-1) + n^c$, $T(1) = 1$, a kde $c \geq 1$ je konstanta z $\mathbb{R}^+$.

$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$, $T(1) = 1$. (Použijte substituci $T(2^m) = S(m)$.)

$T(n) = T(n-1) + 2$, $T(1) = 1$.

Jde-li, vyřešte s použitím Master Theoremu následující vztahy. Nejde-li, zdůvodněte proč. Master theorem zformulujte.

1. $T(n) = 5\ T(\frac{n}{4}) + n$
2. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$