Teorie algoritmů

Natalie Žukovec

6. cvičení 2021

Je dán následující algoritmus

Vstup: Přirozené kladné číslo x.

Výstup: $f(x)$.

$y_1 := x;\ y_2 := 1$

while $y_2 \neq 0$ do

  if $y_1 > 100$ then

    $y_1 := y_1 - 10;\ y_2 := y_2 - 1$

  else

    $y_1 := y_1 + 11;\ y_2 := y_2 + 1$

end while

return y_1

1. Použijte algoritmus na vstup $x = 93$.
2. Dokažte, že se algoritmus zastaví na každém vstupu. Odhadněte počet průchodů while cyklu pro jednotlivé vstupy.
3. Charakterizujte výstup algoritmu, tj. hodnotu $f(x) = y_1$.
4. Dokažte správnost vašeho tvrzení z bodu 3.

$x > 100 \quad y_2 = 1 \quad 1$

$x \leq 100 \quad (\overset{101}{100} - y_1)2 - 1 \; {+1}$

$x = 93 \quad y_2 = 1$

$x < 90 \quad x = 82 \quad y_2 = 1,\ y_1 = 93,\ y_2 = 2$

$y_1 = 110 \quad y_2 = 2$

$y_1 = 100 \quad y_2 = 1$

$y_1 = 111 \quad y_2 = 2$

$y_1 = 91,\ y_2 = 1$

21

$k+1$

$y_1 = 91,\ y_2 = 0$

$k = \left\lfloor \frac{100 - x}{11} \right\rfloor$

$x + \underbrace{11 + 11 \ldots}_{k}$

$f(93) = 91$

$f(x) = \begin{cases} x - 10, & x > 100 \\ 91, & x \leq 100 \end{cases}$

Rozhodněte, zda je správný algoritmus pro nalezení minimální kostry.
V případě, že správný je, najděte variant a dokažte invariant.
V případě, že správný není, najděte protipříklad.

Vstup: Souvislý graf $G = (V, E)$ a ohodnocení hran $a : E \to \mathbb{Z}$.
Výstup: množina hran kostry K_{min}.

variant: $m = |E|$
invariant: V každém kroku T obsahuje nějakou min kostru $K_{min} \subseteq T$

minKostra1($G = (V, E)$, a: $E \to \mathbb{Z}$)
setřiď hrany od největší
$T := E$
    `foreach` $e \in E$ (od největší)
        `if` $T \setminus \{e\}$ je souvislý graf `then`
            $T := T \setminus \{e\}$
`return` T

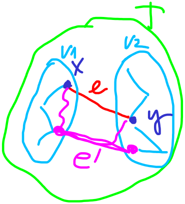
1) na začátku $T = E$ platí
3) na konci $K_{min} \subseteq T$, $T = K_{min}$
2) Ať $K_{min} \subseteq T$ a e je nejdražší

A) $T \setminus \{e\}$ není souvislý $\quad T_1 = T$, $k_{min} \subseteq T_1$

B) $T \setminus \{e\}$ je souvislý

1) $e \notin k_{min}$ a $k_{min} \subset T \setminus \{e\}$

2) $e \in k_{min}$, $k_{min} \setminus \{e\}$ není souv. $T \setminus \{e\}$ je souv.



existuje cesta v T z x do y

ta cesta má hranu e' z V_1 do V_2 $\qquad a(e) \geq a(e')$

$\rightarrow k' = (k_{min} \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$

$$a(k') = \cancel{a(k_{min})} - a(e) + a(e') \geq \cancel{a(k_{min})}$$

$$a(e') \geq a(e)$$

$k' \subseteq T \setminus \{e\}$ $\qquad a(e) = a(e')$

Je dán Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_f\})$ tabulkou

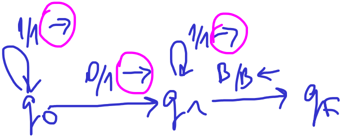
δ

$\delta(q_0,0)=(q_1,1,R)$

	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, R)$	$(q_0, 1, R)$	–
q_1	–	$(q_1, 1, R)$	(q_f, B, L)
q_f	–	–	–

$\delta(q_0,B)$
$\delta(q_1,0)$

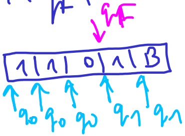
1. Ukažte práci TM na vstupním slově $w = 1010$ a vstupním slově $u = 1101$.
   $w \in L(M)$ zast. úsp.
2. Určete jazyk $L(M)$, který TM přijímá. Zdůvodněte. Je pravda, že ho také rozhoduje? $w \notin L(M)$ zast. neúsp.
   ANO
   1^k, kde $k = |w|$
3. Pro slova $w \in L(M)$ charakterizujte obsah pásky, která TM má v okamžiku, kdy TM skončí v koncovém (akceptujícím) stavu.



$q_0 1010 \vdash 1q_0010 \vdash 11q_110 \vdash$
$\vdash 111q_10$ TM skončí neúsp.

$q_0 1101 \underbrace{\vdash 1 q_0 101 \vdash 11 q_0 01}_{\vdash^*} \vdash 111 q_1 1 \vdash 1111 q_1 B$

$\vdash 111 q_F 1$



$L(M) = \{ w \mid |w|_0 = 1 \}$

1) 1^n skončí neúsp $\delta(q_0, B)$

2) $q_0 1^n 0 1^k 0 u \vdash^* 1^n q_0 0 1^k 0 u \vdash 1^n 1 q_1 1^k 0 u \vdash 1^{n+1} 1^k q_1 0 u$

$\underbrace{1^n 0 1^k}$

q_0 $1 q_1$ $q_1 B$

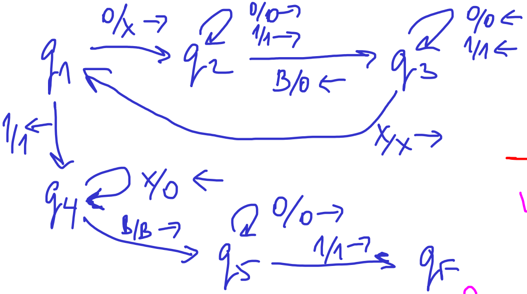
1^{n+k+1}

skončí neúsp $\delta(q_1, 0)$

Je dán Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, B, \{q_f\})$, kde $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_f\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, X, B\}$ a δ je dána tabulkou

	0	1	X	B
q_1	(q_2, X, R)	$(q_4, 1, L)$	–	–
q_2	$(q_2, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	–	$(q_3, 0, L)$
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, X, R)	–
q_4	–	–	$(q_4, 0, L)$	(q_5, B, R)
q_5	$(q_5, 0, R)$	$(q_f, 1, R)$	–	–
q_f	–	–	–	–

1. Ukažte práci TM na vstupním slově $w = 0101$ a vstupním slově $u = 0$.
2. Určete jazyk $L(M)$, který TM přijímá. Zdůvodněte. Je pravda, že ho také rozhoduje? NE
3. Pro slova $w \in L(M)$ charakterizujte obsah pásky, která TM má v okamžiku, kdy TM skončí v koncovém (akceptujícím) stavu.



$L(M) = \{ w \mid |w|_1 > 0 \}$

$q_1 1 \vdash q_4 B 1 \vdash q_5 1 \vdash 1 q_F$

0^k TM je v horním cyklu

$0^k 1 u \to X 0^{k-1} 1 u 0$

$\to X^k 1 u 0^k$

$\to 0^k 1 u 0^k$

$q_1 0101 \vdash X q_2 101 \vdash^* X101 q_2 B \vdash X10 q_3 10 \vdash^* q_3 X1010$

$\vdash X q_1 1010 \vdash q_4 X 1010 \vdash q_4 B 01010 \vdash q_5 01010$

$\vdash 0 q_5 1010 \vdash 01 q_F 010$ skončí úsp.

$q_1 0 \vdash X q_2 B \vdash q_3 X 0 \vdash X q_1 0 \vdash^* X X q_1 0$ nezastaví

$1u$ $1u$

(2) Hypotéza: $L(M) = \{w \mid |w|_1 \geq 1\}$

a) $\{w \mid |w|_1 \geq 1\} \subseteq L(M)$ $\quad u = ra$

$$q_1 0^n 1 u \vdash X q_2 0^{n-1} 1 u \vdash^* X 0^{n-1} 1 u q_2 B \vdash$$

$$\vdash X 0^{n-1} 1 r q_3 a 0 \vdash^* q_3 X 0^{n-1} 1 u 0 \vdash X q_1 0^{n-1} 1 u 0 \; (*)$$

Tento cyklus se opakuje až

$$* \vdash X^n q_1 1 u 0^n \vdash X^{n-1} q_4 X 1 u 0^n \vdash^{(n-1)} q_4 B X^n 1 u 0^n$$

$$\vdash q_5 X^n 1 u 0^n \vdash^{(n)} 0^n q_5 1 u 0^n \vdash 0^n 1 q_7 u 0^n$$

úspěšně zastavil.

Tedy $w = 0^n 1 u \in L(M)$.

b) if $u \notin \{w \mid |w| \geq 1\}$ tak $u \notin L(M)$

(to dokazuji $u \in L(M) \Rightarrow u \in \{w \mid |w|_1 \geq 1\}$

tj. $L(M) \subseteq \{w \mid |w|_1 \geq 1\}$

$|w| \ngtr 1$, tj. $w = 0^n$ $n \geq 0$,

- pro $n = 0$ $w \in \varepsilon$ tj počáteční ID je $q_1 B$
  $\delta(q_1, B)$ není definováno, tj výpočet skončí neúspěšně
- pro $n > 0$ $q_1 0^n \vdash X q_2 0^{n-1} \vdash^* X 0^{n-1} q_2 B$
  $\vdash X 0^{n-2} q_3 0 0 \vdash^* q_3 X 0^n \vdash X q_1 0^n$

tedy opakováním této části

$X q_1 0^n \vdash^* XX q_1 0^n \vdash^* XXX q_1 0^n \vdash \ldots$

a výpočet nekončí.

TM nerozhoduje jazyk L (na slovech 0^n, $n \geq 1$)
se nezastaví

(3) Pro slova $w = 0^n 1 u$ platí:

$$q_1 0^n 1 u \vdash^* 0^n 1 u 0^{n-1} q_f 0 .$$

Tedy obsah pásky je $\underline{0^n 1 u 0^n}$.